

SCIENCES SUP

Problèmes corrigés

Master • CAPES • Agrégation

30 PROBLÈMES DE PHYSIQUE

- ▶ Problèmes appliqués à la vie quotidienne
- ▶ Corrigés détaillés
- ▶ Méthodes

François Graner

DUNOD

Consultez nos parutions sur dunod.com

Dunod Éditeur, édition de livres, Microsoft Press, ETSF, Ediscience, InterEditions

Recherche OK

Édiscience
ETSF
InterEditions
Microsoft Press

Donnez un nouveau souffle à votre vie...

Santé - Feng Shui
Bien-être

Mon compte

Accueil Contacts

Sciences et Techniques Informatique Gestion et Management Sciences Humaines

Acheter Mon panier

Interviews

 **Réinventer les RH : urgence !**
Gilles Verrier

 **Ramses 2008 : exigez la nouvelle formule !**
Thierry de Montbrial

→ toutes les interviews
Club Enseignants
→ Inscrivez-vous!

Événements

Découvrez le [vidéoblog](#)
Profession dirigeant

En librairie ce mois-ci

Développement personnel et coaching : découvrez le [NOUVEAU SITE](#)
[interEditions.com](#) !
les librairies

- Nouveautés - Nouveautés - Nouveautés - Nouveautés -

 **Bacchus 2008**
Enjeux, stratégies et pratiques dans la filière vitivinicole
Jean-Pierre Couderc, Hervé Hannin, François d'Hauteville, Etienne Montaigne

 **Profession dirigeant**
De la conception du changement à l'action
Gérard Roth, Michal Kurtyka

 **PYTHON**
Petit guide à l'usage du développeur agile
Tarek Ziadé

 **150 petites expériences de psychologie du sport**
pour mieux comprendre les champions...et les autres
Yvan Paquet, Pascal Legrain, Elisabeth Rosnet, Stéphane Rusinek

LES BIBLIOTHÈQUES DES MÉTIERS

→ Bibliothèque du DSI
→ Gestion industrielle
→ Métiers de la vigne et du vin
→ Marketing et Communication
→ Directeur d'établissement social et médico-social
→ Toutes les bibliothèques

LES NEWSLETTERS

→ Action sociale
→ Psychologie
→ Développement personnel et Bien-être
→ Entreprise
→ Expertise comptable
→ Informatique et NTIC
→ Industrie
→ Toutes les newsletters

bibliothèques des métiers newsletters Microsoft®Press ediscience.net expert-sup.com
Notice légale

30 PROBLÈMES DE PHYSIQUE

François Graner

Chercheur au CNRS et à l'université Joseph Fourier de Grenoble

Proetudes.blogspot.com
PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

Une précédente version de cet ouvrage a été publiée aux Éditions Springer dans la collection "Scopos" sous le titre Physique de la vie quotidienne.

Illustration de couverture : Getty images®

Conseiller éditorial : Jean-Michel Ghidaglia

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du

Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2008
ISBN 978-2-10-052086-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Sommaire

AVANT-PROPOS : RENOUVEZ AVEC LE JEU	III
1 • MÉTHODE POUR ÉTUDIER LA PHYSIQUE DE LA VIE QUOTIDIENNE	1
2 • ÉNONCÉS DES PROBLÈMES	13
3 • CORRIGÉS DES PROBLÈMES	51
DONNÉES QUOTIDIENNES	285
REMERCIEMENTS	289
INDEX	291

	<i>Liste des problèmes</i>	<i>Énoncés</i>	<i>Corrigés</i>
1	Choisissez-vous la fine ou l'épaisse ? (yoyo)	13	51
2	Reculer sans s'enfermer (<i>remorque</i>)	14	57
3	Un pan qui glisse (<i>serviette</i>)	14	65
4	Un problème de bille infaisable ? (<i>escalier</i>)	15	71
5	La Lune tombe à pic (<i>éclipse</i>)	16	77
6	Un halo s'observe avec précaution (<i>halo avec des cristaux</i>)	17	88
7	Des glaces qui sortent de leur plan (<i>anamorphose</i>)	19	95
8	Champs légers, fleurs dans la pente et charges véritables (<i>magnétisme</i>)	20	105
9	Bilan thermal propre (<i>bilan d'une journée</i>)	21	112
10	Se faire un œuf en soixante-cinq secondes ? (<i>œuf dur</i>)	22	117
11	Les tas d'air, c'est isolant (<i>thermos</i>)	23	124
12	Voiture avec chauffeur (<i>température d'une voiture</i>)	24	131
13	Boire au frais sous la tente (<i>réfrigérateurs</i>)	25	143
14	Tenir des barres dressées avec un bout de doigt (<i>équilibriste</i>)	27	150
15	Évitez de trop gros coups dans les bonds (<i>balançoire deux places</i>)	28	161
16	L'art des vis qui savent pomper (<i>vis d'Archimède</i>)	29	166
17	En face des lames vibrantes (<i>règle flexible</i>)	30	173
18	Tournez, c'est dément ! (<i>balançoire qui s'enroule</i>)	31	181
19	Leçon des cœurs (<i>caustique</i>)	32	193
20	Une loupe ardente (<i>brûler du papier</i>)	34	198
21	La pierre fine des Celtes (<i>anagyre</i>)	35	205
22	Sans cesse et sans fin (<i>toupie secrète</i>)	36	215
23	La base fait planer l'aimant (<i>toupie qui lévite</i>)	37	219
24	Ne ratez pas la mousse (<i>détente</i>)	40	231
25	Comment évolue le rond quand le robinet coule plus fort ? (<i>évier</i>)	41	237
26	Moteur à flotte : (1) la reine de l'éjection (<i>fusée</i>)	42	247
27	Moteur à flotte : (2) Ce drôle d'oiseau qui se branche à l'eau (<i>oiseau buveur</i>)	43	257
28	L'insecte et les deux sons qu'il émet (<i>coccinelle</i>)	44	263
29	Soyez précis avec le vent (<i>voilier</i>)	46	270
30	La mousse étalée (<i>mousse à deux dimensions</i>)	48	275

Avant-propos : Renouez avec le jeu

► Quel est le but de ce livre ?

Est-ce que la physique a un rapport avec votre vie de tous les jours ? Ce livre explore la physique quotidienne. Il attire votre attention sur des objets ou des phénomènes familiers, que vous pouvez observer avec un peu de matériel simple. Il vous amène à les analyser en détail, avec les méthodes et les équations de la physique.

► Que contient-il ?

Vous y trouverez :

- des *énoncés* d'exercices basés sur des figures et des exemples réels, qui ne vous fournissent pas les notations, ce qui vous oblige à réfléchir ;
- une *méthode* pour les étudier ;
- pour chaque exercice : d'abord l'analyse détaillée pour le *comprendre* ; puis des *indications* et *simplifications* pour le mettre en équations ; ensuite seulement, la résolution des *équations* ;
- des *données* et des *références* pour vous permettre d'aller plus loin.

► À qui s'adresse-t-il ?

Ce livre profitera aux *étudiant-es en Master* et aux *candidat-es des concours scientifiques* : classes préparatoires, Capes, agrégation. Il est constitué d'exercices posés au concours d'entrée de Normale Sup : il repose sur le programme des deux premières années de physique, et fait intervenir une réflexion poussée. À ce titre, il s'adresse aussi largement aux *enseignant-es*, à qui il fournit des méthodes utiles pour le cours et pour les examens ; des notes, des ouvertures et des références permettent d'aller plus loin. Enfin ce livre peut s'adresser, pourquoi pas, à vous qui, pour votre travail ou votre curiosité, cherchez de solides bases à votre expérience de la physique dans la vie quotidienne.

► Comment l'utiliser ?

Étudiez d'abord l'introduction générale et la méthode qu'elle propose ; n'hésitez pas à la relire de temps en temps pour l'assimiler.

Ensuite, abordez les exercices, en trois étapes :

- 1) Commencez par essayer de vous faire une *intuition*, même vague, de ce qui se passe. Pour cela, regardez les illustrations, mais surtout faites vous-même les *expériences* faciles qui sont proposées.
- 2) Identifiez et *analysez physiquement* les phénomènes mis en jeu.
- 3) Consultez la *correction* proposée. Elle est décomposée en sous-questions que vous pouvez aborder une par une. Retenez-vous de lire toutes les réponses d'un coup ; vous pouvez travailler à deux, la personne qui a les corrigés pose les questions à l'autre.

► La physique de la vie quotidienne est-elle particulière?

L'étude de la vie quotidienne ne fait pas intervenir de la physique très difficile. Il s'agit beaucoup de mécanique, optique, électromagnétisme, thermodynamique. On y rencontre moins de physique statistique ou non-linéaire, très peu de quantique, et presque jamais de relativité. C'est donc le plus souvent de la physique qui date du XIX^e siècle, c'est-à-dire ce qu'on étudie dans les deux premières années.

La difficulté vient de ce qu'il s'agit de problèmes non scolaires. Ils sont dictés par la réalité et non par les soucis de la pédagogie. On subit une combinaison de phénomènes différents venant de plusieurs domaines. On ne peut donc pas partir d'une théorie et en tirer des déductions.

Au contraire, comme un détective, il faut analyser des indices concrets et essayer d'en imaginer les causes, en s'aidant de l'intuition. Vous pourrez y arriver peu à peu en vous exerçant. Les pages qui suivent vous y aideront.

Méthode pour étudier la physique de la vie quotidienne

1.1 COMMENT ABORDER UN PROBLÈME NOUVEAU ?

Avant de faire un calcul, il faut savoir ce qu'on veut trouver ! Commencez d'abord par analyser, seulement ensuite calculez.

1.1.1 Manipulez

Pour commencer, faites toujours quelques essais avec des objets concrets. Ainsi, aux épreuves orales où ces exercices ont été posés, l'objet à étudier était disponible, chaque fois que c'était possible. Par exemple, faites tomber une serviette (exercice 3), faites tenir une règle sur votre doigt (exercice 14), ouvrez à fond le robinet puis fermez-le complètement (exercice 25). Construisez votre intuition, posez-vous toutes les questions imaginables.

Trouvez les différentes quantités physiques qui entrent en jeu. Faites-les varier expérimentalement. Lesquelles sont reliées entre elles ? Pour ne pas vous mâcher ce travail, absolument essentiel, l'énoncé ne fournit à peu près aucune notation.

Estimez leurs ordres de grandeur. Déterminez lesquelles sont négligeables devant lesquelles. Déduisez-en quelles approximations vous pourrez utiliser.

1.1.2 Analysez

Déterminez quels phénomènes interviennent, et à quels domaines de la physique ils appartiennent. Est-on en optique géométrique ou en optique physique ? Est-ce de la

mécanique ou de la thermodynamique ? Attention, on peut être dans plusieurs domaines à la fois ; certaines questions couplent l'électromagnétisme et la mécanique, avec de surcroît un bilan thermodynamique.

Essayez de reconnaître ce qui est difficile ou facile, ce qui est intéressant ou trivial. Séparez votre système en sous-systèmes que vous savez analyser séparément (exercices 22, 25), et aussi séparez le phénomène en étapes successives distinctes (exercices 24, 27). Demandez-vous quelles lois physiques interviennent, et si certains principes peuvent être violés (exercice 21).

Continuez à construire votre intuition. Pour cela, gardez votre curiosité, ouvrez l'œil, n'hésitez pas à manipuler effectivement les objets proposés ; ou à tâtonner en essayant des équations (exercice 2). Si vous constatez que votre intuition et vos équations sont en désaccord, surtout ne vous braquez pas : c'est toujours signe qu'il y a quelque chose à apprendre, soit une erreur dans l'équation, soit de la physique non triviale (exercices 3, 4).

1.1.3 Calculez

Estimez des valeurs numériques, même approximatives, tout au long de votre travail. Si vous vous contentiez des expressions littérales, avec une application numérique bâclée à la fin, vous bloqueriez rapidement. Vous avez besoin des ordres de grandeur pour comprendre les rôles respectifs de chacune des différentes contributions physiques.

N'hésitez pas à écrire toutes les opérations que vous faites, ligne par ligne, en ne faisant qu'une opération à la fois. Évitez les calculs de tête, que vous ne pourrez pas relire ni modifier.

Le calcul à la main vous paraît démodé à l'heure actuelle ? Détrompez-vous. La calculatrice ou l'ordinateur n'intervient qu'en tout dernier, quand on a déjà fait tout le travail : cela ne sert qu'à obtenir une valeur numérique précise ou tracer une courbe.

Choisissez soigneusement quelle figure vous tracez, avec quels axes : que cherchez-vous à montrer ? Quelle quantité tracerez-vous en abscisse et en ordonnée, sur quel domaine de variation ?

1.1.4 Vérifiez

Pensez systématiquement à vérifier vos calculs. Vérifiez dans l'ordre :

- Les **unités** : toute équation doit être homogène. Si vous écrivez un signe « plus », « moins », « égal », « inférieur » ou « négligeable », les termes à droite et à gauche doivent avoir la même dimension, c'est-à-dire s'exprimer dans la même unité.

- Les **signes** : vérifiez que vous n'avez pas écrit d'absurdité visible.
- Les **comportements** : d'une équation, par exemple le rôle de tel ou tel paramètre ; ou d'une solution, par exemple sa limite aux temps longs. Vous devez plus ou moins savoir à l'avance quel comportement vous attendez avant d'avoir commencé les calculs.
- Les **ordres de grandeur** : ce sont eux qui vous évitent d'annoncer des résultats ridicules et vous ramènent à la réalité.
- Les **détails des calculs**.

J'ai parfois volontairement laissé des fausses pistes (par exemple aux exercices 18 et 20) : cela vous montre comment les vérifications permettent de les détecter et de revenir en arrière.

1.1.5 Discutez les incertitudes

Tout modèle est entaché d'une certaine incertitude, toute valeur expérimentale aussi. On dit que la mesure et le modèle sont en accord si leurs valeurs sont compatibles, compte tenu de leurs incertitudes respectives. C'est un point essentiel en physique : voir pour cela les références [1, 2].

Cependant, dans les corrigés des problèmes présentés ici, les incertitudes atteignent ou dépassent souvent 100 %. On se contente alors de comparer les ordres de grandeur. Ceci explique pourquoi on ne discutera pas ici en détail les calculs d'erreur.

Contentons-nous de rappeler comment s'additionnent des incertitudes indépendantes (page 139). Si quatre variables a, b, c, d valent chacune probablement entre 0,99 et 1,01, donc chacune a une incertitude relative de $\pm 1\%$, leur produit $abcd$ vaut probablement entre 0,98 et 1,02 ; il est très peu probable qu'il vaille 0,96 ou 1,04. Plus précisément, pour des variables gaussiennes indépendantes, ce sont les carrés des incertitudes relatives δ qui s'additionnent :

$$\delta^2(abcd) \approx \delta^2(a) + \delta^2(b) + \delta^2(c) + \delta^2(d).$$

Par exemple, deux incertitudes de 5 % cumulées donnent 7 % ; une incertitude de 1 % et une de 10 % donnent 10 % : c'est toujours la plus grande incertitude qui domine.

Une autre conséquence est que les exposants multiplient les incertitudes relatives :

$$\delta(a^n) \approx n\delta(a).$$

Ainsi, une quantité voit son incertitude diminuer quand on la porte à un exposant 1/2 ou 1/4 (page 140 ou 223).

1.2 LES APPROXIMATIONS

Quand pouvez-vous, quand devez-vous procéder à une approximation ? Cette question est souvent la terreur des élèves. C'est pourquoi, ici, on essaiera de justifier systématiquement sur quelles bases scientifiques on a décidé telle ou telle approximation. Pour cela, on peut proposer la classification suivante :

Approximation essentielle. Un terme est exactement nul, pour une raison essentielle ; par exemple la présence d'une symétrie. Ce n'est pas à proprement parler une approximation. Exemple : une composante d'un champ électrique ou magnétique (page 175 ou 219).

Approximation analytique. Un terme est assez petit pour ne pas être pertinent. Attention : vous ne pouvez pas négliger dans l'absolu un terme a qui a une unité. Vous devez le comparer à un autre terme b de même unité, et vous étudiez le nombre sans dimension $x = a/b$:

$$\text{correct :} \quad a \ll b \quad \text{ou} \quad x = \frac{a}{b} \ll 1,$$

$$\text{incorrect :} \quad a \ll \quad \text{ou} \quad a \sim 0.$$

Plus précisément, vous devez réunir trois conditions : trouvez un paramètre x sans dimension ; vérifiez que $x \ll 1$; montrez qu'il n'intervient que dans une expression régulière qu'on peut développer. Réfléchissez jusqu'à quel ordre vous développez l'expression, puis identifiez les termes essentiels et distinguez-les des termes non pertinents. Cela dépend aussi de la précision que vous avez décidé d'obtenir (page 127). Exemple : dans un problème d'électrostatique, on décide presque toujours de négliger le rapport des interactions gravitationnelle et électrostatique entre deux électrons.

Approximation physique. Il y a des moments où vous ne voulez pas vous embarrasser avec les détails. Vous voulez surtout accéder à l'essence de la physique avec des calculs faciles. En ce cas, vous choisirez de négliger un terme qui n'est pas tellement plus petit que 1.

Cela dépend complètement de ce que vous cherchez : de l'énoncé, de ce qu'il attend, et surtout de la précision qu'il demande. Ainsi, vous linéariserez (vous remplacerez une fonction par sa tangente), chaque fois que vous cherchez le terme dominant, pas lorsque vous voulez étudier les termes d'ordre supérieur. Si vous voulez uniquement déterminer l'influence de tel ou tel paramètre, sans calculer de valeurs numériques exactes, il est souvent utile de linéariser. De même, si vous vou-

lez évaluer l'ordre de grandeur de la période d'un oscillateur, vous remplacerez $\sin \theta$ par θ même si vous savez pertinemment que θ atteint des valeurs proches de 1 (voir pages 61 et 185).

Procédez à une approximation de ce type le plus tard possible, quand vous avez déjà bien avancé dans la résolution du problème (voir page 62).

Mentionnez-en alors explicitement les limites. Vérifiez alors toujours après coup si elle était justifiée ou non, et discutez s'il faut ou non reprendre toute l'analyse (exercice 11).

Approximation abusive. L'approximation que vous envisagez ne permet pas d'accéder à l'essence de la physique demandée par l'énoncé. En ce cas, rejetez-la (voir page 236) ; et ce, même si le paramètre sans dimension est bien plus petit que 1 (page 76, ou exercice 20). C'est le cas lorsque la physique intéressante est contenue dans les termes d'ordres supérieurs. Par exemple, en physique quotidienne, pour étudier un gaz réel vous pouvez souvent faire l'approximation que c'est un gaz parfait. En revanche, si vous êtes justement à la recherche d'un effet spécifique aux gaz réels, comme sa variation de température lors d'une transformation à énergie interne constante, cette approximation est inadaptée. Un autre exemple est le cas où le problème est singulier (exercice 18).

1.3 ATTAQUER UN PROBLÈME DE THERMODYNAMIQUE

La thermodynamique demande de la réflexion, voire du bon sens, mais peu de calculs.

1.3.1 Bilans

Les bilans sont essentiels dans toute la physique. Vous devez donc avoir le réflexe d'en faire, et de les comprendre, quel que soit le phénomène qu'on observe.

- L'**énergie** se conserve, il n'y a pas de miracle dans ce domaine, c'est une règle fondamentale. Même si l'énergie peut se transférer d'une forme à l'autre, l'énergie de l'Univers entier est constante. Dans les exercices de ce livre, il suffit que vous sachiez discuter les signes des échanges d'énergie ; mais cela, sachez le faire bien !
- L'**entropie** aussi est relativement simple à utiliser. Rappelez-vous surtout qu'elle ne dépend que de l'état présent de l'objet que vous considérez. Elle tend à augmenter (sous des conditions précises), et ainsi l'entropie de l'Univers entier ne fait qu'augmenter. En physique quotidienne, l'atmosphère joue généralement le rôle de réservoir à température constante ; en ce cas, calculer une variation d'entropie se ramène à calculer un échange de chaleur.

Avec cela, on va déjà très loin. Ainsi, on interdit les moteurs à mouvement perpétuel. En face d'un mouvement entretenu (voir par exemple les « jeux curieux », exercices 22 et 27), dites-vous donc qu'il faut une source d'énergie quelque part.

1.3.2 Chaleur et température

Rappelons que la température décrit un état, tandis que la chaleur décrit un échange. Ce sont donc des notions bien distinctes ! Il est possible d'échanger de la chaleur à température constante, par exemple lors d'un changement d'état (exercice 13). Réciproquement, on peut modifier la température sans échanger de chaleur, par exemple lors d'une détente adiabatique (exercice 24).

Pour ce qui concerne les échanges de chaleur, rappelons qu'il existe trois mécanismes :

La **convection**, quand du gaz ou du liquide se déplace. Le flux de chaleur est proportionnel au flux de matière et à l'énergie interne du fluide.

La **conduction**, dans un solide (ou un liquide fixe). Le flux de chaleur est proportionnel à sa conductivité thermique et au gradient de température.

Le **rayonnement**, lié à un flux électromagnétique (photons) essentiellement infrarouge. Le flux de chaleur dépend de la surface émettrice : à la fois de sa couleur, de sa brillance et de sa température à la puissance 4. Il peut traverser des matériaux transparents à la longueur d'onde considérée, en particulier un gaz ou le vide.

1.3.3 Frottements

Face à certaines confusions fréquentes, rappelons que :

Pour qu'une roue puisse rouler sans glisser, il faut obligatoirement qu'il y ait des forces de frottement de glissement suffisamment élevées ! Comme ces frottements ne travaillent pas, vous pouvez les oublier dans le bilan d'énergie ; mais vous devez en tenir compte dans le bilan des forces. À l'opposé, les frottements de roulement sont faibles, et l'on en tient rarement compte dans l'analyse des forces ; mais ce sont ceux qui contribuent à faire décroître l'énergie mécanique, donc vous pouvez les incorporer dans le bilan d'énergie.

Un système qui fait du bruit, c'est-à-dire qui rayonne des phonons, perd ainsi nécessairement de l'énergie mécanique ; par exemple pages 52, 216, 263, ou lors du choc d'un objet qui tombe par terre. La réciproque n'est pas vraie : un objet peut perdre de l'énergie mécanique de différentes façons, sans nécessairement faire du bruit.

1.4 ATTAQUER UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE

1.4.1 Cinématique, cinétique, statique et dynamique

En mécanique, on distingue différents domaines. D'une part, l'étude des mouvements :

La **cinématique** concerne les vitesses ; elle fait intervenir des mètres, et des mètres par seconde. Elle est purement géométrique.

La **cinétique** inclut les vitesses et les masses, donc aussi la quantité de mouvement, le moment cinétique, l'énergie cinétique.

D'autre part, l'étude des forces :

La **statique** décrit les forces en situation d'équilibre.

La **dynamique** tient compte des forces et des masses, donc des kilogrammes, des newtons, des joules.

Quelques remarques peuvent être utiles :

- Les accélérations sont des quantités cinématiques, mais en général elles sont étudiées en relation avec les forces, dans les problèmes de dynamique.
- Autant que possible, traitez d'abord la cinématique ; la dynamique ne vient qu'après, et encore, quelquefois il n'y en a même pas du tout.
- Attention : s'il y a un roulement sans glissement, les objets en contact ont des trajectoires liées par une relation géométrique simple, donc on doit traiter un problème de cinématique. En revanche, il faut traiter de la dynamique quand il y a glissement, par exemple s'il n'y a pas assez de forces de frottement de glissement (voir ci-dessus la section 1.3.3, ou bien page 58), auquel cas les objets en contact ont des trajectoires indépendantes qui dépendent de leur force d'interaction.

1.4.2 Utiliser l'énergie ou la force ?

L'éternelle question... Face à un exercice de mécanique, posez-vous tout de suite quelques questions simples, qui vous permettront de savoir s'il vaut mieux étudier les forces ou l'énergie. Si vous voulez voir des exemples, ces questions sont discutées en particulier dans les exercices 1 et 3 :

Quelle est la question posée ? Pour des questions simples, il est souvent préférable de passer uniquement par l'énergie, qui vous donne une intégrale première du mouvement. Autrement dit, l'énergie vous permet d'économiser une étape du calcul (voir exercice 1, en particulier page 56). Elle vous donne une équation différentielle du premier ordre au lieu du deuxième. Attention : sauf exception (exercice 28, page 267), ne la dérivez pas par rapport au temps, vous perdriez tout l'intérêt de l'énergie !

Les forces donnent accès à des calculs plus détaillés. Mais réfléchissez donc d'abord : de quels détails avez-vous besoin ? Ainsi, pour étudier l'évolution d'une quantité dans le temps, on croit souvent qu'il est nécessaire de connaître les forces ; puis on intègre, et avec beaucoup d'efforts on retrouve... la conservation de l'énergie.

Combien y a-t-il de degrés de liberté dans le problème ? Cherchez-le tout de suite. S'il y en a un seul, l'énergie est souvent facile à traiter. Si plusieurs degrés de liberté interviennent en même temps et sont couplés de façon compliquée, il est souvent nécessaire de calculer les forces.

Est-ce qu'on peut identifier facilement un système fermé ? Si le système varie dans le temps, il est plus facile de faire un bilan instantané sur une sous-partie du système (plutôt qu'un bilan global) : c'est souvent plus facile en écrivant les forces, comme dans l'exercice 26, page 249.

Est-ce un problème de statique ou de dynamique ? (si c'était de la cinématique ou de la cinétique, il n'y aurait ni forces ni énergie à calculer, donc la question ne se poserait pas). L'énergie facilite souvent les discussions d'équilibre et de stabilité, elle permet de vérifier très facilement les signes et de retrouver des erreurs ; ici encore, sauf besoin impérieux, évitez de la dériver. En dynamique, les forces sont parfois plus utiles.

Toutes les forces dérivent-elles d'un potentiel ? Si oui, l'énergie est probablement avantageuse ; si non, elle est sûrement inutilisable.

Y a-t-il des frottements, une conversion d'énergie mécanique en une autre forme d'énergie ? Si non, en général il est simple de calculer l'énergie mécanique et d'écrire qu'elle est constante ; ici encore, sauf besoin impérieux, évitez de la dériver. Si oui, en général choisissez d'écrire les forces. Mais attention : si vous constatez que la variation de l'énergie a une expression simple, utilisez-la. Ainsi, dans l'exercice 3, le travail des frottements ne dépend que de la position : pour avoir la vitesse en fonction de la position, $v(x)$, l'énergie est plus pratique, page 67 (alors que les forces seraient plus pratiques, si vous cherchiez la vitesse en fonction du temps, $v(t)$).

1.4.3 Comment estimer les ordres de grandeur

Masse. Estimer à l'œil la masse d'un objet est souvent ardu. Le plus simple : évaluez ses dimensions (millimètres, mètres), et sa masse volumique (de l'ordre de un ou plusieurs $10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ pour les matériaux usuels). Vous pouvez aussi évaluer l'ordre de grandeur d'un moment d'inertie en estimant la distance moyenne à l'axe de rotation.

Centre de gravité. Vous pouvez localiser le centre de gravité d'un objet soit en le posant en équilibre sur votre doigt, soit en le tenant suspendu. Dans tous les cas, ne vous fiez pas à une seule mesure : faites plusieurs essais dans des directions différentes ; à chaque essai, dessinez à la craie sur l'objet la direction approximative où vous pensez que le centre de gravité se trouve, et prenez l'intersection de ces régions.

Rayon de courbure. À l'œil, vous pouvez essayer d'imaginer un cercle qui s'ajuste sur l'objet, mais l'intuition y arrive souvent assez mal. Si la courbure est forte : dessinez donc les normales à la surface que vous étudiez, et observez où elles se croisent. Si la courbure est faible : posez l'objet sur une table, et observez de combien son extrémité se soulève au-dessus de la table (voir des exemples de calcul page 46 et page 218, ainsi que l'équation (255)).

1.4.4 Oscillations

Toute une série de problèmes concernent les oscillations. Pour les étudier, posez-vous les questions suivantes, si possible en manipulant l'objet :

- Combien y a-t-il de degrés de liberté indépendants ?
- Y a-t-il une source d'énergie extérieure, ou est-ce une oscillation libre ?
- Est-ce une oscillation périodique ? Si oui, pouvez-vous identifier pourquoi il y a une période bien définie ?
- S'agit-il d'oscillations autour d'un seul état d'équilibre stable (ce qui permet des oscillations harmoniques), d'un état d'équilibre instable (l'oscillation tendra à s'amplifier) ou bien une oscillation entre deux états limites non stables (oscillations de relaxation) ?
- Qu'est-ce qui « rappelle » l'objet vers l'équilibre ? Comment ce rappel dépend-il de la distance à l'équilibre ? Le rappel est-il constant, est-il singulier, est-il proportionnel à la distance à l'équilibre (oscillateur harmonique), est-il une fonction compliquée de la distance à l'équilibre (oscillateur non-linéaire) ?
- Qu'est-ce qui contrebalance ce rappel, permettant de donner naissance à des oscillations : est-ce l'inertie ? Est-ce que l'énergie se convertit alternativement entre deux formes, par exemple potentielle et cinétique ?
- Que cherchez-vous à étudier : la période des petites oscillations ou l'équation du mouvement (auquel cas il est souvent préférable d'étudier l'énergie), ou bien avez-vous besoin de calculer en détail les forces ?
- Peut-on étudier complètement le mouvement, c'est-à-dire la vitesse ou la position en fonction du temps ?
- Peut-on aussi tracer et discuter physiquement le « portrait de phases », c'est-à-dire par exemple la vitesse en fonction de la position ?
- Si vous lancez l'oscillation librement, est-ce qu'elle va osciller de nombreuses fois (en ce cas le nombre d'oscillations, facilement mesurable à l'œil, est appelé

le facteur de qualité) ; ou s'amortir en quelques coups (facteur de qualité un peu supérieur à 1) ; ou s'amortir tout de suite (facteur de qualité inférieur à 1) ?

1.5 NOTATIONS ET RÉFÉRENCES

1.5.1 Notations

On note un vecteur avec une *flèche*, et un vecteur unitaire avec un *accent circonflexe*. Ainsi, pour écrire que le vecteur \vec{u} est égal à son module u multiplié par son vecteur unitaire \hat{u} , on note :

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{u},$$

ou encore :

$$\vec{u} = u \hat{u}.$$

Pour une fonction $f(x, y, z)$ et un champ de vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$, on utilise les notations $\vec{\nabla}$ (« nabra ») et Δ (« delta ») définies par :

$$\vec{\nabla} f = \vec{\text{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \text{div } \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{u} = \vec{\text{rot}} \vec{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}, \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right),$$

$$\Delta f = \text{lapl } f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{u} &= \text{lapl } \vec{u} = (\Delta u_x, \Delta u_y, \Delta u_z) \\ &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{u}). \end{aligned}$$

1.5.2 Les références

Si vous avez accès à internet, n'hésitez pas à procéder à quelques recherches rapides. Les liens internet mentionnés dans ce livre ont été vérifiés pour cette édition

révisée ; mais comme les adresses changent vite, ils ne peuvent pas être garantis. C'est pourquoi j'en ai indiqué peu. J'ai préféré indiquer des références d'articles et de livres, disponibles dans les bibliothèques universitaires, ou par le prêt inter-bibliothèques. Les références pour vous procurer les objets des exercices 21, 22, 23, 27, 28 sont disponibles sur le site de l'éditeur.

Sources et références de ce chapitre

- [1] K. PROTASSOV. *Probabilités et incertitudes dans l'analyse des données expérimentales*. Collection Grenoble Sciences. Presses Universitaires de Grenoble, 1999.
- [2] L. LYONS. *A Practical Guide to Data Analysis for Physical Sciences Students*. Cambridge University Press, 1991.
- [3] J. RENAULT. *Formulaire de physique*. Dunod, Paris, 1990.

Énoncés des problèmes

Problème 1 Choisissez-vous la fine ou l'épaisse ? (corrigé à la page 51)

Manipulation. Observez plusieurs corps dans leur chute. Pour cela, lâchez sans vitesse initiale en même temps un yoyo (voir la figure 1) et un objet libre, par exemple un stylo : lequel va le plus vite ? Mesurez sur votre yoyo toutes les grandeurs physiques importantes. Observez quel effet a le diamètre de la ficelle sur la vitesse du yoyo.

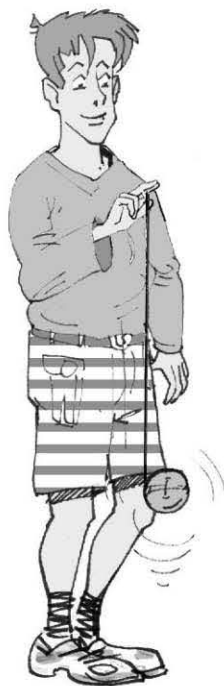


Figure 1 Le cordon ne s'emmêle pas.

Énoncé. Quel est l'effet du diamètre de la ficelle du yoyo sur sa vitesse durant sa chute ? Pour avoir un « effet yoyo » maximum, comment choisirez-vous la ficelle : fine ou épaisse ?

NB : quand on choisit la ficelle du yoyo, on peut avoir en tête aussi d'autres critères, comme sa solidité ou sa maniabilité. Ne vous occupez pas de cela, supposez que la ficelle ne fait pas de nœud (voir la figure 1) et ne casse pas.

Problème 2 Reculer sans s'enfermer (corrigé à la page 57)

Manipulation. Accrochez une remorque derrière une voiture (voir la figure 2). Vous disposez d'une simple boule d'attelage, non munie de ressorts (il ne s'agit pas d'une caravane), qui permet à la remorque de tourner librement sur le côté. Essayez de reculer sans la bloquer : pourquoi est-ce plus difficile que d'avancer ?

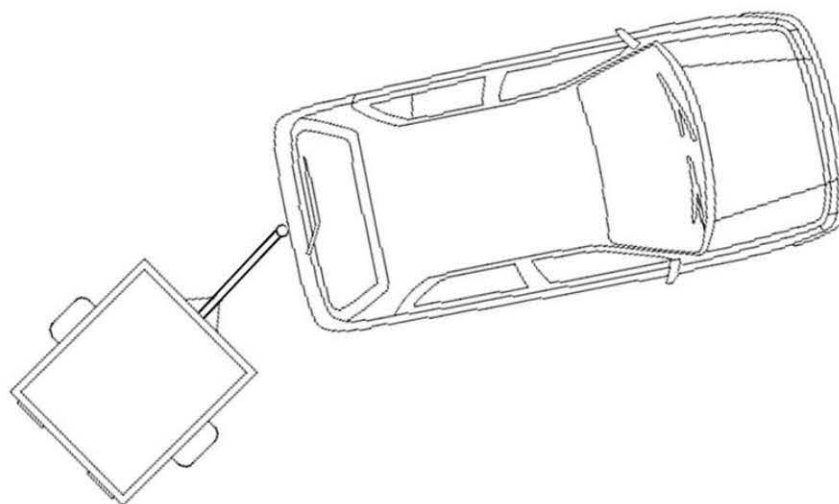


Figure 2 Remorque vue de dessus.

Énoncé. La voiture avance sur la route.

2.1. Quand peut-on dire que la remorque est contrôlable ou devient incontrôlable ?

2.2. Tant que la remorque reste contrôlable : quelle est l'équation de son mouvement ?

2.3. Le mouvement de la remorque est-il stable ?

2.4. Quand la voiture avance ou recule à vitesse constante, quel est le mouvement de la remorque ?

2.5. Alors, comment faire pour reculer avec une remorque ?

Problème 3 Un pan qui glisse (corrigé à la page 65)

Manipulation. Cette manipulation facile aide bien à comprendre. Prenez une serviette de table en tissu ; tout autre objet lisse et souple convient aussi : serviette en

papier, chaînette, ficelle, feuille de papier... Posez-la au bord de la table, et faites-la glisser doucement. Le bout qui dépasse doit pendre verticalement, il faut donc une serviette assez souple (figure 3). Il dépasse de plus en plus : quand il dépasse beaucoup (vraiment beaucoup), sous son poids la serviette se met à glisser de plus en plus vite et tombe. Comptez le temps de la chute.

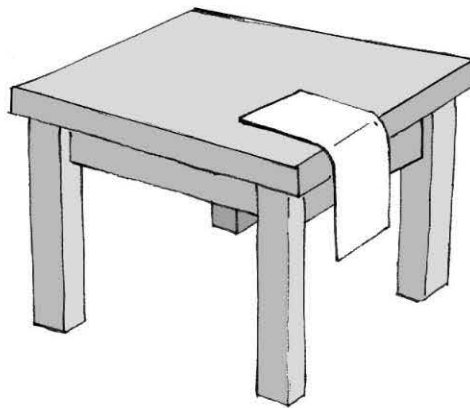


Figure 3 Prenez un linge bien séché ; sans pousser, faites-le glisser.

Énoncé.

3.1. Écrivez l'équation du mouvement de la serviette, en tenant compte ou non du frottement solide de la serviette sur la table.

3.2. Montrez que cette équation fait apparaître un unique temps caractéristique. Estimez son ordre de grandeur, comparez avec votre expérience. Résolvez cette équation, qu'il y ait ou non frottement.

3.3. Comment ce temps caractéristique dépend-il du coefficient de frottement ? Discutez physiquement ce résultat.

Problème 4 Un problème de bille infaisable ? (corrigé à la page 71)

Manipulation. Lancez une bille dans un grand escalier (voir la figure 4).

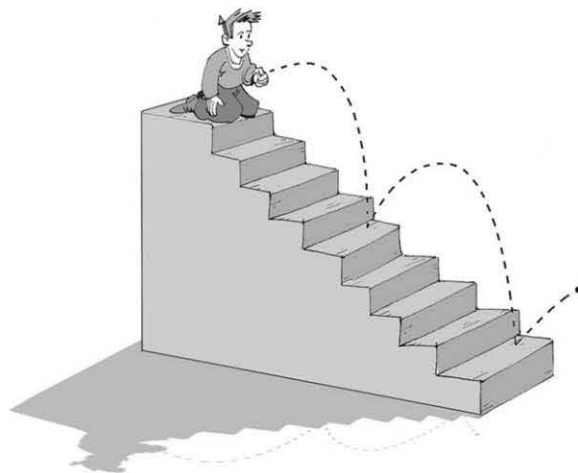


Figure 4 Cette manipulation peut vous coûter une bille.

Énoncé. Étudiez le mouvement de la bille aux temps longs (« comportement asymptotique »). Pour cela :

- 4.1. Discutez tous les paramètres qui interviennent ; à chaque fois, choisissez ce qui vous permet de vous ramener au cas le plus simple. Discutez si vous préférez considérer le cas où les marches sont petites ou grandes (devant quoi ?).
- 4.2. Reformulez alors le problème de façon bien posée, avec des notations adaptées.
- 4.3. Dans le cas le plus simple, mettez en équations le régime asymptotique du mouvement.
- 4.4. Sans chercher à résoudre les équations, discutez le comportement des solutions. Est-il conforme à votre intuition ? Le mouvement est-il périodique ?

Problème 5 La Lune tombe à pic (corrigé à la page 77)

Observation. Où étiez-vous la nuit du 11 août à midi ? Le 11 août 1999, une éclipse de Soleil a longuement traversé une zone très peuplée. Si vous étiez dans la bande de Terre concernée ce jour-là, si le ciel était sans nuage, et si vous étiez muni des indispensables écrans de protection pour les yeux, qu'avez-vous vu à ce moment-là ?

Données. La distance Terre-Lune fluctue un peu, de 365 à 406 milliers de kilomètres, et la distance Terre-Soleil aussi, de 147 à 152 millions de kilomètres. En revanche, les rayons de ces objets sont constants. L'angle apparent varie donc un peu. Le 11 août 1999 à midi, le Soleil et la Lune étaient vus, *depuis le centre T de la Terre*, sous les angles $\alpha_S^{(T)}$ et $\alpha_L^{(T)}$ indiqués par le tableau 1.

TABEAU 1 DONNÉES CONCERNANT L'ÉCLIPSE DU 11 AOÛT 1999 ; VOIR AUSSI PAGES 286 ET 288.

	Terre	Lune	Soleil
rayon (m)	$R_T = 6,37 \cdot 10^6$	$R_L = 1,74 \cdot 10^6$	$R_S = 6,96 \cdot 10^8$
rayon angulaire vu de T		$\alpha_L^{(T)} = 16'0,36''$	$\alpha_S^{(T)} = 15'46,78''$
période (s)	$T_T = 8,62 \cdot 10^4$ (jour sidéral)	$T_L = 2,3 \cdot 10^6$ (mois lunaire)	$T_r = 3,16 \cdot 10^7$ (année)

Énoncé. Essayez de vous mettre dans la peau d'un observateur, par exemple situé sur la bande de centralité (disons en Normandie, où l'éclipse était maximale à 12 h 40 min, ou bien à Metz, vers 12 h 48 min). Que voit-il en fonction du temps : forme du Soleil visible (voir la figure 5), intensité lumineuse qu'il perçoit ?

5.1. Ce qui détermine les propriétés d'une éclipse particulière, ce sont les tailles sous lesquels le Soleil et la Lune nous apparaissent, à nous, observateurs. Comme nous sommes à la surface de la Terre (et non en son centre), nous les voyons sous

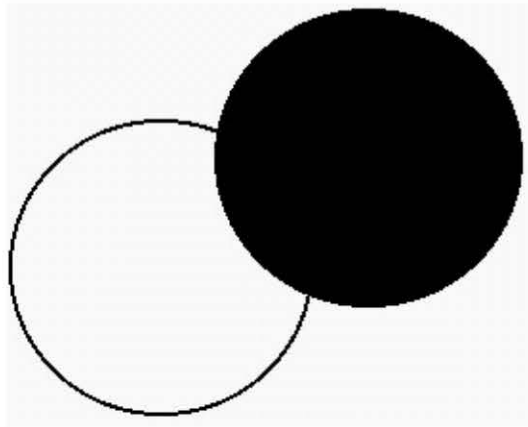


Figure 5 Le Soleil a rendez-vous avec la Lune !
La Lune (en noir) éclipse le Soleil (en blanc) quand elle lui passe devant.

des angles α_S , α_L légèrement différents de $\alpha_S^{(T)}$ et $\alpha_L^{(T)}$. Donnez la valeur numérique de α_S et de α_L . Commentez leur différence.

5.2. Définissez ce que c'est qu'une éclipse de Soleil, une éclipse partielle et une éclipse totale. Est-ce que ce sont des phénomènes fréquents ou rares ? Est-ce que cela arrive plutôt quand la Lune est à son premier quartier, pleine, dernier quartier, ou nouvelle ? Ou sans rapport avec les phases de la Lune ? Expliquez aussi ce que c'est qu'une éclipse de Lune.

5.3. La pénombre est l'ensemble des points qui voient le Soleil partiellement occulté. Calculez la taille de la surface terrestre qui se trouve dans la pénombre à un moment donnée, et la vitesse à laquelle la pénombre se déplace par rapport à l'observateur.

5.4. Déterminez la forme exacte de la partie du Soleil qui reste visible : d'abord en fonction de la distance apparente entre les centres du Soleil et de la Lune ; puis en fonction du temps. Tracez l'allure de l'intensité lumineuse en fonction du temps.

5.5. Pour un observateur situé en plein centre de la bande où l'éclipse est vue totale, estimez la durée de l'obscurité. Déterminez la largeur de cette bande.

Problème 6 Un halo s'observe avec précaution (corrigé à la page 88)

Observation. On peut observer un halo autour du Soleil quand l'atmosphère contient de petits cristaux de glace. Ainsi, en montagne, quand le vent ou un canon à neige fait voler une fine poussière de flocons, on observe un halo avec des irisations comme celles de l'arc-en-ciel. On en voit aussi quand il y a des nuages très froids : des cirrus à -40°C , à 5 000 m d'altitude.

Il existe plusieurs types de halos. Le plus fréquent est appelé « petit halo » : c'est un cercle centré sur le Soleil qui a un rayon angulaire de 22° (voir la figure 6). Il est

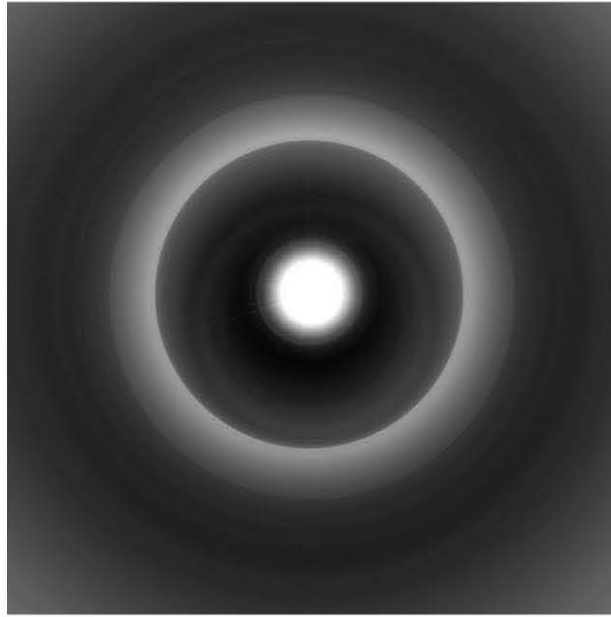


Figure 6 Halo halo ?

donc assez proche du Soleil, et quand on le regarde, il faut faire attention pour ne pas se faire éblouir. On peut en voir plus facilement autour de la pleine Lune, sans risque de se faire éblouir.

Observez ce halo à différentes reprises. Vérifiez qu'il a toujours le même rayon angulaire. Comment se répartissent les couleurs : où est le rouge, où est le violet ? Le ciel est-il plus clair à l'intérieur ou à l'extérieur du halo ?

Énoncé. L'objet de l'exercice est de comprendre la formation et l'aspect du halo à 22° .

6.1. Proposez des arguments indiquant que l'explication ne peut être que la réfraction, et non la diffraction. Expliquez sans équation comment la réfraction peut être à l'origine du halo, comment il se forme, et pourquoi il correspond à un extremum de déviation des rayons du Soleil.

6.2. En traitant les cristaux de glace comme un prisme dont l'angle au sommet est 60° (expliquez pourquoi), écrivez l'expression du rayon angulaire du halo. Profitez-en pour en déduire l'indice de réfraction de cette glace, et vérifiez si sa valeur vous paraît raisonnable.

6.3. Le halo est plutôt rougeâtre à l'intérieur et bleuté à l'extérieur : l'indice de réfraction de la glace augmente-t-il ou diminue-t-il avec la longueur d'onde ? Comparez avec d'autres matériaux.

6.4. Toujours en traitant les cristaux de glace comme des prismes, écrivez analytiquement comment la déviation des rayons lumineux dépend de l'angle d'incidence. Tracez grossièrement l'allure de cette fonction. Discutez l'influence de la longueur d'onde. Vérifiez le résultat de la question 6.2.

6.5. Selon vous, le ciel est-il plus clair à l'intérieur ou à l'extérieur du halo ? Discutez qualitativement ce que l'on voit, comment l'intensité que l'on perçoit varie avec l'écart au Soleil. Discutez si le halo représente une petite ou une grande fraction de la lumière réfractée.

Problème 7 Des glaces qui sortent de leur plan (corrigé à la page 95)

Manipulation. Prenez une louche bien brillante ; ou une grande cuillère ; ou un objet cuivré, comme le pavillon d'une trompette. Regardez-vous dedans. Pointez d'abord votre doigt vers le côté intérieur (concave) de la louche, et regardez son reflet envahir toute la louche. Pointez-le ensuite vers le côté extérieur (convexe) de la louche et regardez son reflet déformé (voir la figure 7).

Vous pouvez faire d'autres essais : posez le côté concave de votre louche contre un miroir, et regardez les différents reflets concentriques. Comme ils sont un peu sombres, vous les verrez mieux si vous disposez d'une lampe de poche. Que faut-il éclairer : le miroir, la louche ou votre visage ? Essayez.

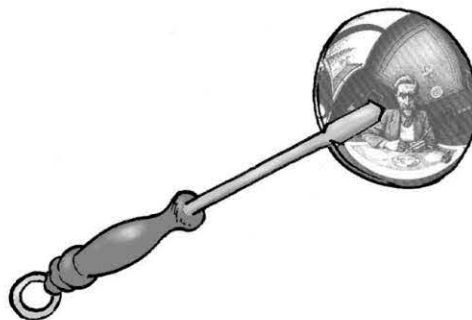


Figure 7 Belle louche.

Énoncé. Il s'agit ici de miroirs « déformants », ou encore « anamorphose » si vous voulez faire savant. Il en existe différents types, qu'on peut voir dans des parcs d'attraction. Peu se prêtent à une mise en équation traitable analytiquement. On propose ci-dessous quelques cas particuliers.

7.1. Considérez un liquide qui tourne en bloc autour d'un axe vertical, en « rotation solide » : tous les points du liquide ont la même vitesse angulaire de rotation uniforme et constante. Quelle est alors la forme d'équilibre de sa surface libre, sous l'effet de la gravité ? Connaissez-vous des liquides très réfléchissants ? Si vous prenez un tel liquide, et que donc la surface libre vous sert de miroir, quelles sont les propriétés d'un tel miroir ? Quels sont : ses avantages, ses inconvénients, ses caractéristiques physiques pour la formation des images, ses applications éventuelles ?

7.2. Observez un cône réfléchissant ; essayez par exemple de trouver un porte-mine dont l'embout métallique est assez brillant. Posez-le sur une table, l'embout vers le

haut. Mettez votre œil au-dessus du cône, bien dans l'axe, et observez le reflet d'un objet plat posé sur la table, par exemple un dessin. Comment le reflet de l'objet est-il déformé ? Où cette image se forme-t-elle ?

7.3. Prenez un miroir cylindrique, posez-le verticalement sur une table. Vous pouvez prendre une théière métallique ; ou un rouleau de papier aluminium, pas froissé pour qu'il reste assez brillant ; voire une boîte de conserve, de préférence en acier, dont vous aurez enlevé l'étiquette. Si un objet est posé sur la table, par exemple un dessin, indiquez qualitativement comment son image est déformée : est-ce le même problème que la question 7.2 ?

7.4. Pourquoi une boule de Noël nous donne-t-elle l'impression d'être si brillante ?

7.5. Posez le problème sous sa forme générale : soit un miroir de forme quelconque, et un objet placé à côté de lui, quelle forme a son reflet dans le miroir ? Indiquez comment on doit poser les équations qui décrivent la transformation pour passer de l'objet à l'image, en pensant à préciser où vous mettez votre œil. Mais n'essayez pas de les écrire explicitement, ni de les résoudre (sauf avec un ordinateur).

Problème 8 Champs légers, fleurs dans la pente et charges véritables (corrigé à la page 105)

On peut vouloir évaluer des champs magnétiques créés par des objets plus variés que les spires et les bobines des manuels classiques. On va montrer que pour des objets plans cela reste simple.

NB : Pour une fois, je ne propose pas de manipulation.

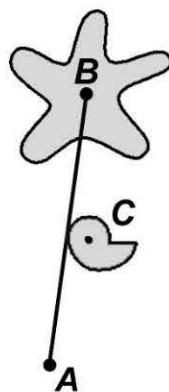


Figure 8 Vous avez entendu parler d'un « champ de fleurs », mais savez-vous le calculer ?

Énoncé. Considérez la fleur dessinée sur la figure 8. Le but est de calculer le champ magnétique créé par la tige, par les pétales, ou par les feuilles, en supposant que ce sont des éléments parcourus par un courant électrique.

8.1. De façon générale, considérez un fil parcouru par un courant, entièrement contenu dans un plan. Écrivez le plus simplement possible l'expression du champ

qu'il crée en un point qui appartient au même plan. Vérifiez cette expression sur le cas de la boucle plane circulaire.

8.2. Appliquez votre expression pour calculer le champ créé au point C par la tige, que vous pourrez décrire comme un fil fini. En utilisant le fait que C est dans un plan de symétrie de la tige, faites le calcul par une méthode indépendante. Trouvez-vous le même résultat ? Quelle(s) correction(s) faut-il appliquer à vos formules pour tenir compte de ce que la tige n'est pas un circuit fermé ? Discutez physiquement.

8.3. Appliquez votre expression pour calculer le champ créé au point B par les pétales, que vous pourrez décrire par une expression mathématique que vous jugerez adaptée. Qu'est-ce qui est important pour caractériser la forme, et qu'est-ce qui ne joue pas de rôle ?

8.4. Même question pour calculer le champ créé au point C par la feuille, ou par tout autre objet en forme d'escargot.

Problème 9 Bilan thermal propre (corrigé à la page 112)

Manipulation. En soi, l'observation est simple. Il s'agit d'étudier vos actions, durant une journée habituelle (figure 9), et d'en faire le bilan énergétique. Regardez autour de vous et relevez quelques ordres de grandeur de puissances et d'énergies. Quelle est la puissance d'éclairage installée dans la pièce où vous êtes ? Quelle est la valeur énergétique du dernier paquet de biscuits que vous avez mangé, ou de votre bouteille d'huile préférée ? Les données du tableau de la page 288 peuvent également vous aider.



Figure 9 Des joules à chaque étape : évaluez la puissance et l'énergie d'un jour.

Énoncé.

9.1. Faites le bilan énergétique personnel de votre journée d'hier. Quelle a été votre consommation personnelle ? Comment a varié votre énergie, et celle de l'Univers tout entier ?

Faites le bilan entropique personnel de votre journée d'hier. Comment a varié votre entropie, et celle de l'Univers tout entier ?

9.2. Utilisez ce bilan pour discuter quelques questions : qu'est-ce qu'on appelle « chaleur humaine », quelle est sa valeur ? Combien faut-il faire d'efforts pour maigrir de 100 g ? Exprimez la réponse en une unité qui vous parle, par exemple des mètres de dénivelée de marche en montagne (figure 9). Inversement, quelles réserves de graisse faudrait-il emmagasiner si l'on voulait hiberner plusieurs mois ?

9.3. Comparez votre consommation personnelle, avec la consommation d'énergie et la création d'entropie lors de différentes actions :

- Transport : comparez 100 km à vélo et en voiture. Avec ce que vous consommez pour faire 100 km de vélo, combien de kilomètres pouvez-vous faire en voiture ?
- Chauffage : comparez la chaleur dégagée par un être humain avec celle qu'on reçoit du Soleil. Considérez une pièce d'appartement en hiver, et comparez l'effet sur sa température des différentes sources de chaleur : les gens qu'elle contient, les radiateurs, les éclairages, et les échanges thermiques par les fenêtres.
- Eau : comparez les divers ordres de grandeur ci-dessus avec l'énergie et l'entropie associés au fait de chauffer une casserole d'eau, ou de se faire couler un bain chaud.

Problème 10 Se faire un œuf en soixante-cinq secondes

(corrigé à la page 117)

Manipulation. Chauffer des œufs n'est pas pénible (figure 10). Prenez des œufs de calibre 60-70 grammes, plongez-les dans l'eau bouillante, sortez-les de l'eau après des durées différentes que vous chronométrez, et ouvrez-les immédiatement.

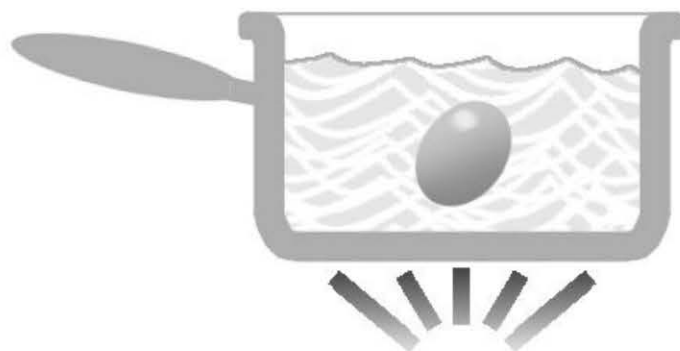


Figure 10 Allez vous faire cuire un œuf !

Énoncé. Combien de temps faut-il pour cuire un œuf ? On mesure qu'il faut environ :

- pour un œuf à la coque : de trois à quatre minutes ;

- pour un œuf mollet : de cinq à sept minutes ;
- pour un œuf dur : une bonne dizaine de minutes, voire jusqu'à treize minutes.

10.1. À partir de ces trois mesures, que pouvez-vous dire de la température à l'intérieur de l'œuf, à différents instants successifs ?

10.2. Vous pouvez en déduire la valeur d'une grandeur caractéristique de l'œuf : laquelle ? quelle est cette valeur, et quelle précision obtient-on ?

10.3. Selon que l'œuf sort du réfrigérateur ou est à température ambiante, le temps de cuisson est-il très différent ?

Problème 11 Les tas d'air, c'est isolant (corrigé à la page 124)

Combien de temps le café peut-il rester chaud ? On ne peut pas empêcher que sa température baisse, mais on peut ralentir son refroidissement en le plaçant dans une « thermos ». C'est une bouteille avec deux parois, entre lesquelles on n'a laissé que très peu d'air (c'est un vide partiel : sa pression est bien plus faible que la pression atmosphérique P_{atm}).

Manipulation. Regardez une thermos dans un magasin. Fréquemment, ses performances sont indiquées sur l'étiquette, soit sous forme de chiffre, soit sous forme de graphe. Le principe de la mesure est simple. On verse de l'eau chaude initialement à température T_0 dans la thermos et on la bouche. Au bout d'un temps t de quelques heures, on rouvre et on mesure la température $T_{\text{int}}(t)$ à l'intérieur (voir la figure 11). Si vous en possédez une, observez-la attentivement. Si vous avez un thermomètre et un peu de patience, vous pouvez essayer vous-même la mesure de température.

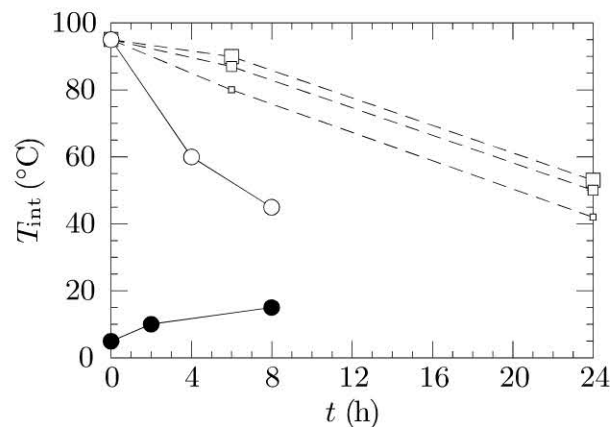


Figure 11 Température T_{int} à l'intérieur d'une thermos, en fonction du temps t .

Ces tests sont réalisés avec une température ambiante $T_{\text{amb}} = 23$ °C. Les points représentent les mesures, données par les fabricants sur des étiquettes de bouteilles thermos commerciales. Une bouteille d'un ℓ , en plastique, est testée en partant de liquide à température initiale $T_0 = 4$ °C (ronds noirs) ou $T_0 = 95$ °C (ronds blancs). Les trois bouteilles thermos en métal ont trois tailles différentes : 1 ℓ (grands carrés), 0,7 ℓ (carrés moyens), et 0,45 ℓ (petits carrés). Elles sont préchauffées à 95 °C avant d'y verser le liquide, également à 95 °C. Pour guider l'œil, on a relié les points de mesure par des lignes : continues pour le plastique, pointillées pour le métal.

Énoncé. L'objet de l'exercice est que vous compreniez physiquement comment T_{int} varie avec t , que vous proposiez un modèle pour expliquer le rôle de la taille et de la matière de la bouteille, et que vous le confrontiez aux données des fabricants.

11.1. Analysez qualitativement (donc sans poser d'équations) tout ce qui intervient dans la variation de T_{int} au cours du temps. Pour chaque partie du système, précisez quel est le principal phénomène physique pertinent et comment il dépend des différentes dimensions de la bouteille. Expliquez l'importance d'avoir deux parois concentriques.

11.2. Faites la liste de toutes les approximations et simplifications à mettre en jeu. Proposez un modèle théorique (très approximatif) en vous limitant à la contribution dominante.

11.3. Écrivez l'équation d'évolution de $T_{\text{int}}(t)$. Résolvez-la de façon approchée. Discutez le rôle de la température initiale de l'eau, de la taille et de la matière de la bouteille.

11.4. Confrontez votre modèle aux données expérimentales des fabricants (voir la figure 11). Déterminez la puissance échangée à cause des pertes. Discutez après coup la validité de vos approximations : vous ont-elles permis de saisir l'essentiel de la physique du problème ?

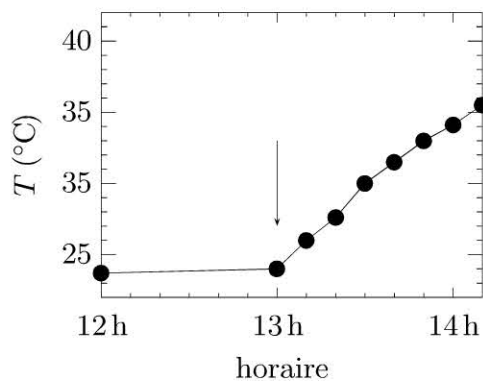
11.5. Déduisez-en quelle est la meilleure manière d'utiliser votre thermos pour augmenter son efficacité.

Problème 12 Voiture avec chauffeur (corrigé à la page 131)

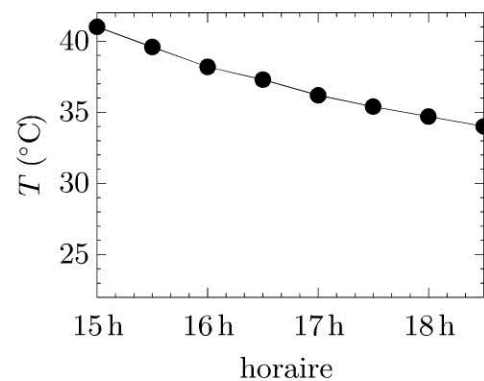


Figure 12 Sortez la voiture du garage et mettez-la au soleil.

Manipulation. Une voiture est dans un garage. Sortez-la et placez-la en plein soleil (voir la figure 12). Comment varie sa température ? Placez-y un thermomètre et relevez quelques mesures de temps en temps. La figure 13(a) donne un exemple de



(a) Élévation de température, au cours d'un après-midi, d'une voiture qu'on met à 13 h (flèche) en plein soleil.



(b) Mesures de la température de la même voiture lorsqu'on la remet dans le garage à 15 h.

Cercles noirs reliés par un trait plein : mesures de la température de la voiture. Pointillé : mesures de la température de son environnement, c'est-à-dire d'abord le garage ; puis l'extérieur à partir de 13 h ; puis à nouveau le garage à partir de 15h. Ces données proviennent de l'article de LEE, GILLEY et CARIS (voir page 143) ; vu la différence de température ambiante entre ces deux figures, il est possible qu'elles aient été réalisées deux jours différents.

Figure 13

telles mesures. La température se stabilise-t-elle ? Si oui, à quelle valeur ? Puis rentrez la voiture dans le garage et refaites vos mesures (voir la figure 13(b)). Comment la température varie-t-elle ?

Énoncé. Le but est de comprendre comment la température varie, et de tirer des mesures le maximum de renseignements physiques.

12.1. Discutez brièvement le bilan de puissance qui détermine comment varie la température de la voiture. Pourriez-vous en déduire le flux d'énergie que nous recevons par le rayonnement du Soleil ?

12.2. Écrivez le bilan quand la voiture est à l'ombre. Qu'est-ce que vous pouvez apprendre à partir de la figure 13(b) ? Discutez le temps que met la voiture à revenir à la température du garage.

12.3. Écrivez le bilan quand la voiture est au soleil. Qu'est-ce que vous pouvez apprendre à partir de la figure 13(a) ? Si on laissait la voiture au soleil, après les mesures de la figure 13(a), comment varierait sa température aux temps longs ?

12.4. Déduisez-en la puissance que la voiture reçoit du Soleil, puis le flux lumineux que la Terre reçoit du Soleil. Comparez avec la valeur tabulée (voir page 288).

12.5. Déduisez-en la température de la surface du Soleil.

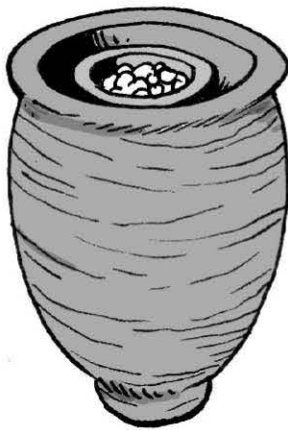
Problème 13 Boire au frais sous la tente (corrigé à la page 143)

Manipulation. Pas emballé par les canicules, le missionnaire refroidit les bocks au frigo et déguste sa bière bien fraîche. Elle ressort par les pores de sa peau ; cela le rafraîchit : pourquoi ?

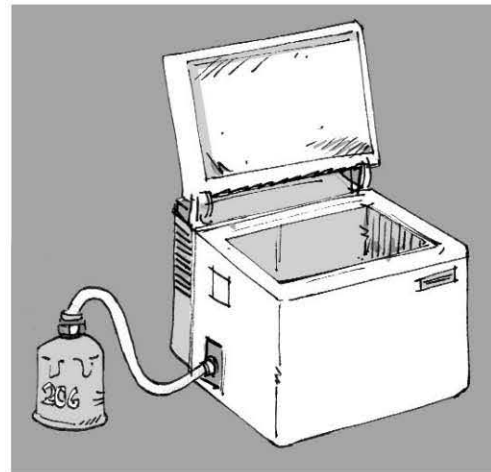
Pendant ce temps, l'oncle sort un marc très doux et le thé à la menthe. Apparemment, la boisson fortement alcoolisée et la boisson chaude le rafraîchissent aussi : pourquoi ?

Énoncé. L'objet de cet exercice est de comprendre comment fonctionnent deux types de réfrigérateurs basés sur des fluides, sans aucune pièce mécanique. Ils sont déconcertants : l'un fonctionne à l'eau, l'autre nécessite de chauffer. Étudiez-les en parallèle et comparez leurs qualités. Essayez de comprendre comment se passent les échanges de chaleur.

13.1. Le réfrigérateur de brousse, qu'on peut aussi appeler « pot-en-pot », est constitué d'une grande jatte en terre de 60 cm de diamètre, dans laquelle on en place une autre un peu plus petite (voir la figure 14(a)). On remplit l'espace entre les deux avec de l'eau (ou du sable mouillé). En quelques heures, l'intérieur de la petite jarre devient plus frais : jusqu'à 19 °C, ce qui, par rapport à la température ambiante (36 °C), représente un gain de 17 K ! On peut y conserver des légumes plusieurs semaines : on couvre avec un linge mouillé, on l'entrepose dans un endroit sec et ventilé (c'est important), et on remet chaque jour un ou deux litres d'eau dans l'espace entre les jarres.



(a) Une jatte adaptée aux champs.



(b) Froid dans une tente.

Figure 14

Sans rien connaître de ce réfrigérateur, pouvez-vous déjà imaginer pourquoi il faut mouiller l'espace entre les jattes ? Réalisez un bilan d'énergie des différentes parties en présence : le réfrigérateur, les légumes, l'air ambiant. Représentez ce bilan sous forme de graphe, avec des flèches indiquant le signe des échanges d'énergie. Y a-t-il des parties qui décrivent un cycle ? Est-ce que le premier ou le second principe de la thermodynamique semble violé ? Commentez physiquement.

Essayez alors d'imaginer le principe de fonctionnement de ce réfrigérateur. Expliquez pourquoi il faut de l'eau, pourquoi il fonctionne mieux dans un endroit sec et ventilé. Calculez ses performances : température atteinte, puissance réfrigérante, consommation, production d'entropie, efficacité. De quoi dépendent-elles, comment les améliorer ? Estimez leurs valeurs numériques. Déterminez son coût de fonctionnement.

13.2. Le réfrigérateur de camping se branche sur une bouteille de gaz. On allume une petite flamme qu'on laisse brûler en permanence (voir la figure 14(b)). Le compartiment intérieur du réfrigérateur devient frais ! On peut y conserver des légumes et même y fabriquer des glaçons. Ce type de réfrigérateur est appelé de différents noms : à absorption ; tritherme ; ou à thermosiphon. Il n'a pas de pièce mécanique, il est extrêmement silencieux, on n'entend qu'un léger bruit de bulles. Pour cette raison, ce type de réfrigérateur est utilisé dans les chambres d'hôtel. En ce cas il fonctionne à l'électricité, ce qui prouve que le gaz n'est pas un élément indispensable.

Reprenez les mêmes questions qu'au 13.1, et comparez les résultats.

Problème 14 Tenir des barres dressées avec un bout de doigt

(corrigé à la page 150)

Manipulation. Prenez un stylo et essayez de le faire tenir verticalement sur votre doigt. Essayez un autre objet qu'un stylo : bougie, manche à balai, règle (voir la figure 15). Observez attentivement ce qui se passe et ce que vous devez faire pour éviter qu'il ne tombe. Est-ce plus facile avec un objet gros ou mince, dense ou léger, court ou long ? Faites le test avec un bâton télescopique pour montagnards, dont vous pouvez faire varier la longueur sans modifier la masse.

Énoncé. Essayez d'abord de comprendre intuitivement comment vous faites tenir votre stylo : est-ce que vous utilisez votre vue ou votre toucher ? Comment votre

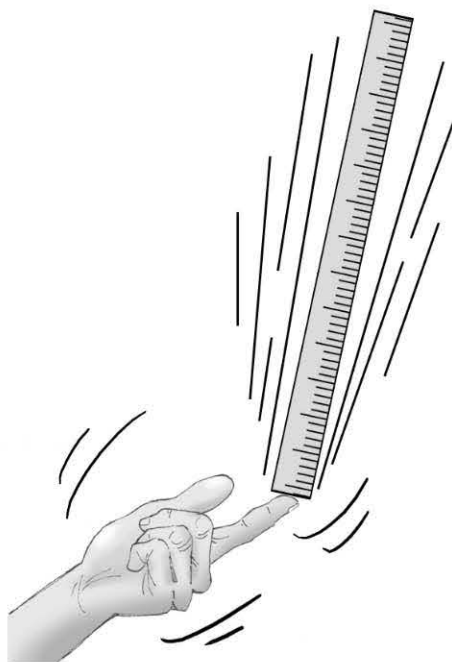


Figure 15 Connaissez-vous la règle sur le bout du doigt ?

doigt agit-il sur le stylo ? Puis essayez de répondre aux questions ci-dessous, en vous demandant à chaque étape s'il est plus judicieux d'étudier les forces ou l'énergie (voir page 7).

14.1. Montrez que le stylo tomberait si vous laissez votre doigt fixe. En combien de temps environ tomberait-il ? Discutez les ordres de grandeur. Étudiez le mouvement : de quel type de mouvement s'agirait-il ?

14.2. Quand vous déplacez votre doigt, quelle est la quantité physique qui est importante ? En quoi agissez-vous sur le stylo ? Discutez les ordres de grandeur. Tenez-en compte (de façon simple) et étudiez à nouveau le mouvement. Le stylo tombe-t-il ?

14.3. Est-ce que l'action de votre doigt dépend de la situation (position ou inclinaison) du stylo ? Tenez-en compte (de façon simple) et étudiez à nouveau le mouvement. Discutez les ordres de grandeur. Le stylo tombe-t-il ?

14.4. Est-ce que l'action de votre doigt répond immédiatement à la situation (position ou inclinaison) du stylo, ou y a-t-il un certain retard dû au délai de votre réponse ? Tenez-en compte (de façon simple) et étudiez à nouveau le mouvement. Discutez les ordres de grandeur. Le stylo tombe-t-il ?

14.5. Suggérez alors une explication de la façon dont vous procédez pour empêcher le stylo de tomber. Faites les calculs correspondants pour voir si votre suggestion est correcte. Comparez avec votre intuition initiale. Discutez les ordres de grandeur. Est-ce plus facile avec un objet gros ou mince, dense ou léger, court ou long ?

Problème 15 Évitez de trop gros coups dans les bonds

(corrigé à la page 161)

Manipulation. Allez dans un jardin public et observez deux enfants qui s'amuse sur une balançoire à deux places munie de ressorts (voir la figure 16). Essayez de

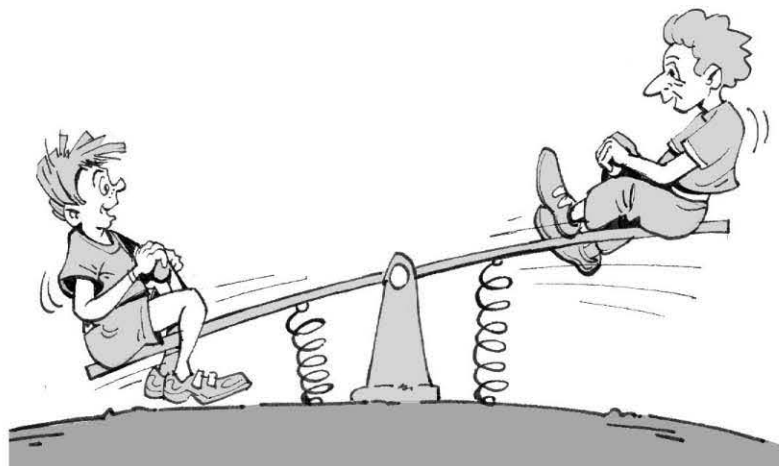


Figure 16 Évitez l'à-coup dans le bond.

rassembler vos souvenirs du temps où vous pratiquiez cette activité. Puis choisissez un(e) partenaire à peu près de la même masse que vous, retrouvez votre âme d'enfant, et allez tous deux expérimenter sur la balançoire. Essayez de comprendre pourquoi les balançoires à ressort supplantent celles sans ressort.

Énoncé. Si vous vouliez construire une balançoire de ce type, comment choisiriez-vous les ressorts ?

La difficulté de ce problème réside seulement dans l'analyse physique, et dans le choix des équations qu'on pose. Je ne souhaite donc pas donner d'indications. À vous d'analyser ce qui se passe, de déterminer votre cahier des charges pour la balançoire, de discuter les ordres de grandeur pertinents, de sélectionner les grandeurs physiques importantes et les notations correspondantes, et finalement de fixer leurs valeurs numériques. Enfin, comparez votre réponse à ce que les constructeurs de balançoire ont effectivement choisi !

Problème 16 L'art des vis qui savent pomper (corrigé à la page 166)

Pour monter du blé dans un silo à grain, on peut utiliser des pompes du type « vis d'Archimède ». Une telle pompe peut également servir à monter de l'eau (voir la figure 17), et ceci depuis des millénaires, comme son nom l'indique. Il s'agit d'un tuyau en hélice, dont l'axe est un peu incliné. Le bas du tuyau trempe dans l'eau, ou dans le tas de grains. On fait tourner le tuyau autour de son axe, et l'eau (ou les grains) ressort à l'autre bout, tout en haut.

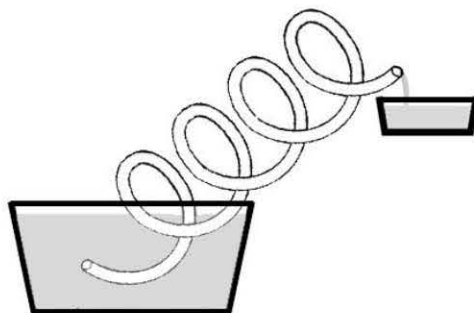


Figure 17 Faut-il une valve pour bloquer la chute ?

Manipulation. On peut en voir en démonstration à de nombreux endroits, dont la Cité des Sciences de la Villette à Paris. C'est un peu difficile de faire la manipulation chez soi, il faut un tuyau en plastique un peu rigide auquel on arrive à donner la forme voulue.

Énoncé.

16.1. Pouvez-vous deviner quel est le principe de fonctionnement de cette pompe ? Tout du moins, pouvez-vous d'ores et déjà éliminer quelques possibilités ? Est-ce

de la statique ou de la dynamique ? Pourquoi est-ce important que l'axe soit incliné : que se passerait-il s'il était vertical ou horizontal ? Dans quel sens faut-il tourner l'hélice ? La réponse n'est pas très compliquée, mais réfléchissez un moment avant d'aller voir le corrigé.

16.2. De quel angle faut-il incliner l'axe pour obtenir la meilleure performance possible ? Estimez quelques ordres de grandeur.

Problème 17 En face des lames vibrantes (corrigé à la page 173)

Manipulation. Prenez un objet plat et mince, par exemple une règle de 30 cm ou plus. Posez-en un bout bien à plat sur la table, et maintenez-le fermement avec une main. Laissez dépasser l'autre bout, et faites-le vibrer avec votre autre main (voir la figure 18). Essayez de déterminer à quelle fréquence il vibre. Faites varier les différents paramètres sur lesquels vous pouvez jouer, et déterminer lesquels influent sur cette fréquence.

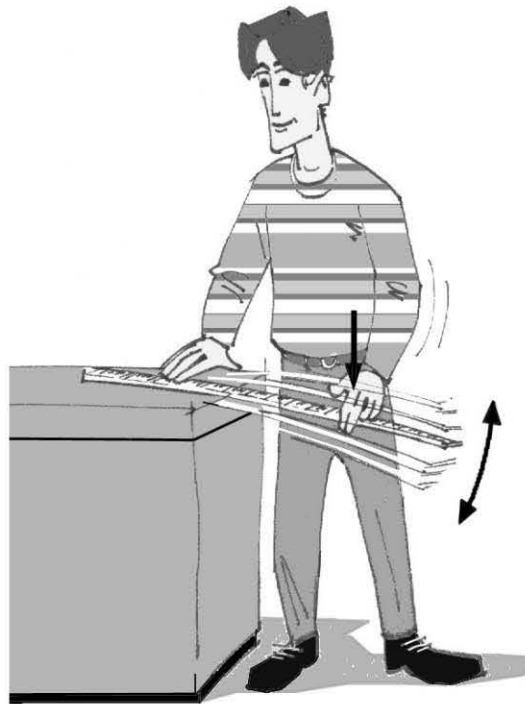


Figure 18 La règle est-elle inflexible ?

Énoncé. Le problème consiste à étudier les vibrations transverses d'un objet épais, non tendu. Cela concerne par exemple le plongeur de natation, le son d'un xylophone, la déformation d'une tour sous l'effet d'un choc latéral ou d'un tremblement de terre.

C'est intéressant de comparer avec un autre problème, plus classique, surtout en musique : celui des vibrations transverses d'un objet mince et tendu, par exemple une corde de violon ou de piano, ou une peau de tambour. À chaque étape, expli-

quez les points communs et les différences entre le présent problème, « épais », et le problème classique, « tendu ».

17.1. Faites la liste des simplifications que vous pouvez ou aimeriez effectuer avant d'aborder l'étude de ce problème.

17.2. Il vaut mieux utiliser les forces que l'énergie : pourquoi ? Pour les forces, il faut tenir compte des forces intérieures à la règle (composantes parallèle et normale à la règle), ainsi que de leurs moments : d'après votre intuition, qu'est-ce qui va être le plus important ?

17.3. Écrivez le principe fondamental de la dynamique pour un petit élément de volume de la règle, en fonction des forces intérieures à la règle et de leur moments (sans détailler leur expression : on l'explicitera ci-dessous). Que pouvez-vous d'ores et déjà en déduire concernant les forces parallèles et normales, ainsi que les moments ?

17.4. Les moments des forces intérieures à la règle dépendent de la déformation de la règle : de quelle quantité exacte dépendent-ils ? Supposez que la relation est linéaire : quel est le signe et la dimension de la constante de proportionnalité ? Dépend-elle de la forme de l'objet, de sa composition ?

NB : n'essayez pas d'évaluer son ordre de grandeur à ce stade, on le discutera ci-dessous.

17.5. Alors, écrivez explicitement l'équation d'évolution de la règle, sous une forme utilisable. Étudiez-la. Montrez qu'elle est à variables séparables, indiquez la méthode de résolution et le type de solutions.

17.6. Discutez le nombre de conditions aux limites qui interviennent, comment on peut écrire ces conditions, ce qu'elles représentent physiquement. Analysez les cas les plus simples.

17.7. Déterminez de quels paramètres dépend la période des oscillations. Par ailleurs, estimez expérimentalement l'ordre de grandeur de cette période. Déduisez-en l'ordre de grandeur de la constante de proportionnalité qui caractérise l'objet, introduite ci-dessus au 17.4.

Problème 18 Tourniquez, c'est dément ! (corrigé à la page 181)

Manipulation. Installez-vous sur une balançoire usuelle, et entortillez-la complètement en tournant sur vous-même (voir la figure 19). Lâchez-tout ! Que se passe-t-il ? La balançoire se déroule, vous tournez de plus en plus vite, au moment où elle est complètement déroulée ça fait un peu mal au cœur, puis elle se renroule, s'arrête, et repart en sens inverse. Observez, manipulez. Regardez bien la corde. Essayez de voir sur quels paramètres vous pouvez jouer pour modifier ce mouvement. Essayez de comprendre physiquement ce qui se passe. Faites des essais pour tester vos hypothèses.



Figure 19 À fond la caisse !

Énoncé. Quelle est la période de ce mouvement ?

Pour répondre à cette question, il vous faudra suivre des étapes classiques, voir page 7 : définir le système, référentiel, repère, nombre de degrés de liberté, choisir entre l'énergie et les forces, sélectionner les quantités physiques pertinentes (et leur donner des notations) en éliminant les autres, estimer des ordres de grandeur, calculer des valeurs numériques, et discuter physiquement.

Mais attention : ici, l'origine physique du mouvement et les résultats sont un peu surprenants. Analysez en suivant scrupuleusement les questions de la page 9. Ouvrez l'œil avant de vous précipiter dans les calculs ; n'hésitez pas à retourner manipuler une balançoire ; et cherchez bien avant de regarder la solution.

Problème 19 Leçon des cœurs (corrigé à la page 193)

Manipulation. Prenez un verre d'eau et placez-le au soleil, ou sous l'ampoule du plafonnier. Observez la surface : vous y reconnaîtrez la forme représentée sur la figure 20, qui évoque un cœur (ou d'autres parties du corps, voir page 197). Une fois que vous aurez remarqué ce cœur, vous constaterez que vous le rencontrez souvent : d'une tasse de café à un bol de lait, en passant par un vase ou la cuvette des toilettes.

Manipulez votre verre : levez-le, inclinez-le, déplacez-le par rapport à la source de lumière. Changez de source lumineuse, de verre, de liquide : dans quels cas voyez-vous le cœur ?



Figure 20 Un cœur pris au piège dans un verre.

Décrivez ce que vous voyez. Où est-ce le plus brillant : à l'intérieur du cœur, à l'extérieur, ou sur le cœur lui-même ? Observez bien : y a-t-il des régions du cœur plus brillantes que d'autres ?

Ensuite, placez la pointe d'un crayon (ou de votre doigt) devant votre verre, pour faire de l'ombre : déplacez lentement le crayon, pour voir comment son ombre se déplace. Déduisez-en d'où vient la lumière qui éclaire chacun des points du cœur. En particulier, d'où vient la lumière qui éclaire la pointe ?

Énoncé. Avant de continuer, il est indispensable de bien réaliser la manipulation proposée ci-dessus. Le but est d'essayer de comprendre comment ce cœur se forme, et pourquoi il est omniprésent autour de nous.

19.1. Expliquez l'origine du phénomène, les conditions où il apparaît ou disparaît. Discutez le rôle :

- de la source lumineuse : sa forme, sa distance, son spectre, sa position ;
- du verre : son matériau, sa forme, sa couleur, son état de surface, sa transparence, son inclinaison, son diamètre ;
- du liquide : sa couleur, sa transparence, sa hauteur ;
- de l'observateur : sa position.

19.2. Déterminez l'équation de la courbe. Pour cela :

- discutez s'il s'agit d'un problème à 2 ou à 3 dimensions ;
- simplifiez le problème au besoin ;
- déterminez l'équation de chaque rayon lumineux ;
- discutez le lien entre chaque rayon lumineux et la forme d'ensemble du cœur ;
- écrivez l'équation qui détermine la courbe ;
- tracez l'allure correspondante ;
- vérifiez si cela ressemble au cœur que vous avez sous les yeux dans votre verre.

Problème 20 Une loupe ardente (corrigé à la page 198)

Manipulation. Petit problème ardu et brûlant. Prenez une loupe (ou le verre de vos lunettes), et placez-vous au soleil. Essayez de concentrer les rayons du Soleil sur votre main : est-ce douloureux ? Puis concentrez-les sur une feuille de papier (voir la figure 21). Comment devez-vous procéder pour qu'elle s'enflamme le plus vite possible ?

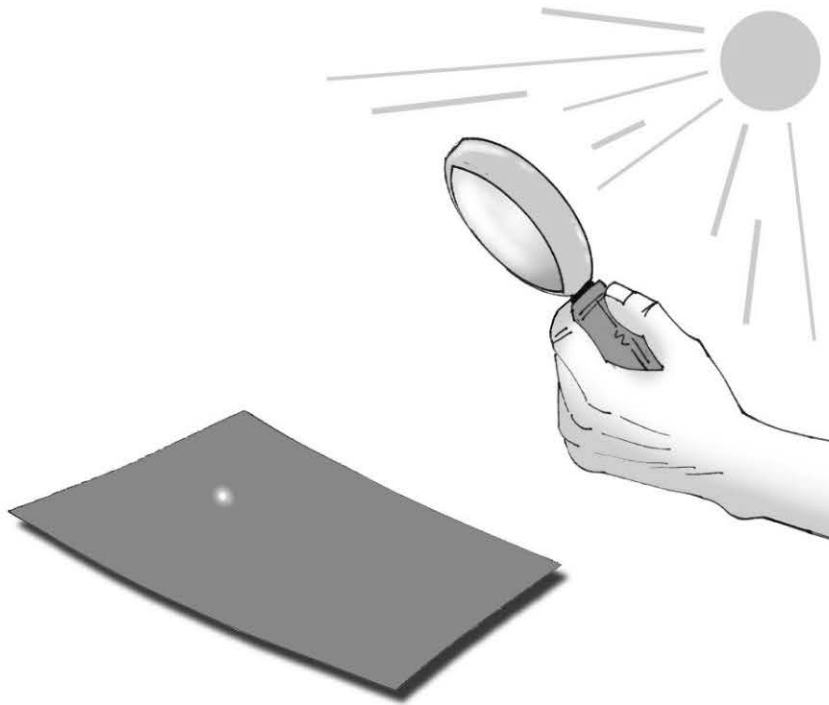


Figure 21 Brûlez-le quand ?

Énoncé. Le but est de comprendre combien de temps il faut pour que le papier s'enflamme. Pour cela :

- Expliquez physiquement pourquoi la température du papier s'élève.
- Faites la liste de tous les paramètres pertinents.
- Lesquels sont fixés ? Lesquels pouvez-vous choisir, et alors quelle valeur allez-vous leur donner ?
- Estimez leurs ordres de grandeur.
- Faites un bilan de puissance grossier (procédez aux simplifications et approximations que vous jugerez utiles).
- Déduisez-en l'ordre de grandeur du temps que met le papier à s'enflammer.
- Comparez avec le temps que vous constatez dans votre expérience.
- Votre modèle est-il réaliste ? Pouvez-vous l'améliorer ?

Problème 21 La pierre fine des Celtes (corrigé à la page 205)

Observation. La « pierre celtique », ou « anagyre » (en anglais : « rattleback »), dont je dispose (voir p. 11) est un ellipsoïde très allongé : 14 cm de long, 3 cm de large, 2 cm de haut.

Si l'on fait tourner tout doucement cet anagyre sur une table, il a l'air normal. Mais une bonne poussée, ça trompe. Par exemple si on le lance dans le sens des aiguilles d'une montre, comme c'est naturel pour un droitier (voir la figure 22(a)), il ralentit et commence à tanguer (voir la figure 22(b)). Puis il change d'avis, arrête d'osciller, et se met à tourner dans le sens trigonométrique (voir la figure 22(c)), opposé à son sens de départ !

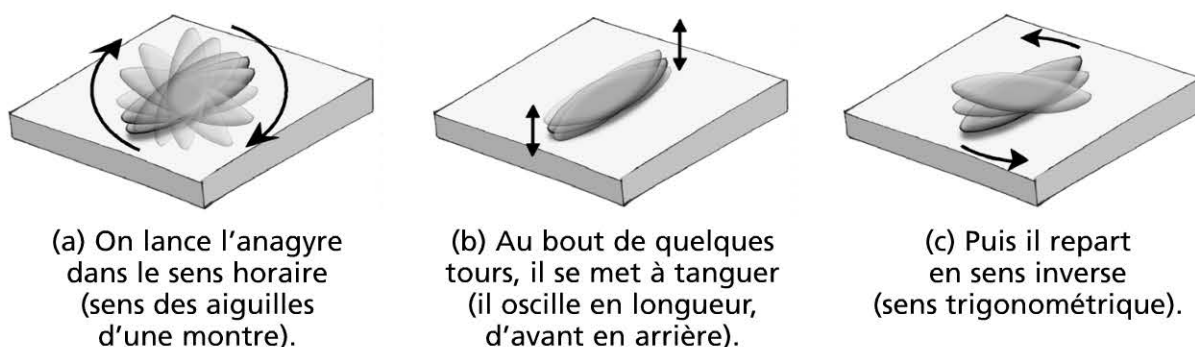


Figure 22

Manipulation. Si vous en possédez un, vous pouvez faire divers essais :

- Vous pouvez le manipuler dans tous les sens : vu de l'extérieur, il a l'air complètement symétrique. Si vous essayez de déterminer la position de son barycentre (voir page 8), vous constatez qu'il est bien situé au centre de l'ellipsoïde.
- Le frottement est visiblement un paramètre crucial. S'il y a trop de frottements, l'anagyre s'arrête rapidement, avant de pouvoir inverser son sens. Il faut bien choisir sa surface, qui doit être lisse ; mais si elle glisse trop bien, par exemple un carrelage, l'anagyre tourne longtemps et s'inverse peu, donc l'effet cesse d'être spectaculaire.
- L'oscillation de tangage a l'air de jouer un rôle essentiel. Par exemple, si on lâche l'anagyre sans vitesse initiale, mais en position de tangage, comme sur la figure 22(b), il se met spontanément à tourner dans le sens trigonométrique (voir la figure 22(c)).
- Lancé dans le sens trigonométrique (ce qui est naturel pour un gaucher), il tourne régulièrement pendant une centaine de tours sans faire d'histoires. Le sens trigonométrique semble donc favorisé. Si l'on retourne l'objet, c'est l'inverse : le sens favorisé est le sens horaire.

Énoncé. L'objet de ce problème est d'essayer de comprendre, autant que possible, l'originalité du mouvement de l'anagyre. Il n'est pas question de réaliser une étude complète de son mouvement.

21.1. Pourquoi l'anagyre choque-t-il votre intuition ? Quels principes physiques pensez-vous qu'il viole ? Y a-t-il vraiment une incompatibilité fondamentale avec les principes que vous avez appris ? Essayez d'imaginer d'où pourraient venir les propriétés de l'anagyre. Que pensez-vous de ses symétries ?

21.2. Combien ce problème a-t-il de degrés de liberté ? Combien d'équations pourriez-vous écrire ? Auriez-vous envie de vous restreindre à l'étude du cas conservatif ? Est-ce intéressant ou non ? Allez-vous étudier le cas avec ou sans glissement ?

21.3. Pour les équations du mouvement, quel référentiel choisissez-vous ? Et quel repère ? Définissez vos notations, écrivez les relations cinématiques, écrivez les équations dynamiques. Surtout n'essayez pas de les résoudre !

21.4. Analysez physiquement ces équations. Déterminez ce qui distingue l'anagyre d'un objet symétrique plus habituel. Évaluez les rôles respectifs de la distribution de masse, de la forme, des frottements. Pourquoi et comment la rotation change-t-elle de direction ? Connaissez-vous d'autres systèmes où la rotation change de direction, et qu'est-ce que ces systèmes peuvent vous apprendre ?

21.5. En éliminant toutes les variables inutiles, écrivez sous une forme compacte l'équation d'évolution du vecteur vitesse de rotation. N'essayez surtout pas de la résoudre, mais commentez-la physiquement : en particulier, discutez si elle est linéaire ou non. Est-ce qu'elle vous aide à comprendre un peu mieux l'anagyre ?

Problème 22 Sans cesse et sans fin (corrigé à la page 215)

Observation. Vous disposez d'une petite toupie, d'environ 1 cm. Le socle est en plastique, apparemment normal : 6 cm de diamètre environ, avec une légère concavité d'environ 3 mm (voir la figure 23).

La boîte dont je dispose (voir p. 11) est marquée « Top secret » (c'est un jeu de mot, en anglais : « top » veut aussi dire « toupie »).

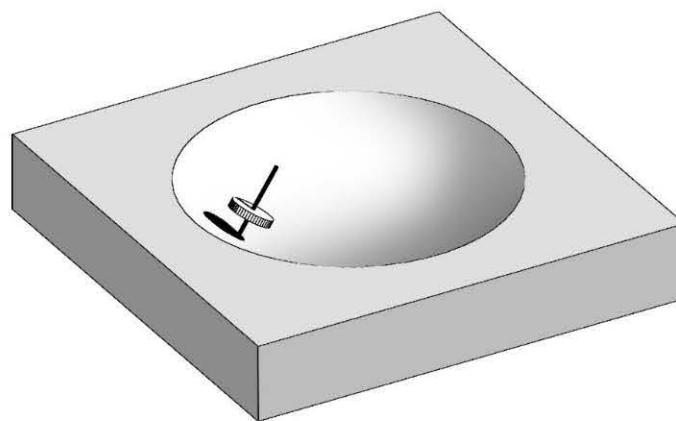


Figure 23 « Top secret » : la toupie secrète.

Vous lancez la toupie, elle tourne, elle tourne, tourne sur elle-même en ronronnant. En même temps elle se déplace et se promène autour du socle, en faisant un tour en une seconde environ. Elle revient au centre du socle, puis repart, revient. Elle continue à tourner sur elle-même, et à se promener sur le socle, à ronronner, pendant des minutes... des heures... des jours ! Comment est-ce possible ?

Manipulation. Vous essayez de comprendre. Vous enlevez le socle et lancez la toupie directement sur la table. C'est une bonne toupie, elle tourne pendant une minute ou deux, mais pas de magie : au bout d'une minute ou deux, elle s'arrête.

C'est donc que le socle joue un rôle essentiel. Vous approchez la toupie du socle, et là, vous obtenez un indice : la toupie est attirée par le socle. Il y a du magnétisme là-dessous. En manipulant un peu plus, vous constatez que la toupie contient un aimant horizontal (les pôles Nord et Sud sont tous les deux à la même hauteur).

Énoncé. Compte-tenu de ces éléments, commentez brièvement chacun des aspects de cette « toupie secrète ».

22.1. Aspect mécanique : discutez la rotation de la toupie sur elle-même, en l'absence de socle. Évaluez l'ordre de grandeur de sa vitesse angulaire de rotation, et des frottements.

22.2. Aspect mécanique (suite) : discutez la trajectoire de son centre de masse. Combien a-t-elle de degrés de liberté ?

22.3. Aspect thermodynamique : commentez la durée du mouvement.

22.4. Aspect électromagnétique : expliquez le rôle de l'aimant.

22.5. Mettez en équation et étudiez l'un de ces aspects, par exemple la trajectoire du centre de masse.

Problème 23 La base fait planer l'aimant (corrigé à la page 219)

Observation. La « toupie qui lévite » a été inventée par Roy M. Harrigan en 1983 (U.S. Patent 4.382.245) (voir p.11).

Son apparence est simple (voir la figure 24). La toupie mesure environ 2 cm, et elle est aimantée. Le socle est un disque de 10 cm de diamètre et de 1 cm d'épaisseur ; lui aussi est aimanté. On fait tourner la toupie et elle lévite pendant une minute ou deux : elle tourne sur elle-même, flottant en l'air à 3 cm au-dessus du socle.

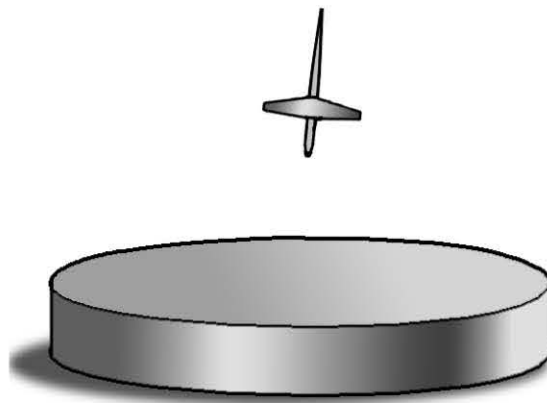


Figure 24 La « toupie lévitante », ou la ballade de Roy Harrigan.

Manipulation. Munissez-vous de deux aimants ordinaires. Vous en trouvez facilement ; ceux qu'on fixe sur les réfrigérateurs conviennent bien. Habituez-vous à les approcher l'un de l'autre, dans tous les sens. Estimez les directions et les ordres de grandeur des forces d'interaction. Si vous en tenez un fermement, arrivez-vous à faire léviter l'autre ? Pourquoi ?

Si vous possédez un exemplaire de cette toupie, manipulez-la. Il faut tout régler avec minutie :

- l'horizontalité du socle ;
- la masse de la toupie : elle doit être ajustée au pourcent près ;
- la vitesse de rotation : elle ne doit être ni trop grande ni trop petite ;
- la manière de la lancer : il faut de l'entraînement. La toupie ne se soulève pas spontanément ; il faut la placer délicatement au seul endroit de l'espace où sa lévitation est stable.

Énoncé. Il s'agit ici de comprendre le principe de base de cette lévitation, puis d'analyser pourquoi elle est plus compliquée qu'il n'y paraît. Données :

- L'aimant du socle a une aimantation \vec{M} uniforme : c'est un moment magnétique par unité de volume, vertical (on peut le prendre dirigé vers le haut, sans perdre en généralité). Son module a une valeur typique d'un matériau ferromagnétique, de l'ordre de $M = 2,5 \cdot 10^5 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$.
- L'aimant de la toupie est constituée du même matériau ferromagnétique, donc porte la même aimantation.
- On rappelle la valeur de la permittivité magnétique du vide :

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}.$$

23.1. Champ magnétique créé par le socle. En l'absence de la toupie, que pouvez-vous dire à propos du champ \vec{B} qui règne à 3 cm au-dessus du socle : direction, sens, symétries ? Montrez que le laplacien de \vec{B} est nul. Peut-on en dire autant de sa com-

posante verticale B_z ? Et de son module B ? Déterminez l'expression de \vec{B} sur l'axe, avec le moins possible de calculs (par exemple en montrant que \vec{B} est le gradient d'une fonction analogue au potentiel électrostatique). Calculez sa valeur numérique à 3 cm au-dessus du socle. Dans le cas du de la toupie dont je dispose, la base est en fait, non un disque plein, mais un anneau (diamètre extérieur 10 cm, diamètre intérieur 6 cm) : comment cela modifie-t-il l'ordre de grandeur du champ ?

23.2. Explication naïve de la lévitation. Placez un aimant (de même matériau, donc de même aimantation volumique que le socle) à 3 cm au-dessus du socle. Quelle force et quel moment magnétiques s'exercent sur lui ? Quel est leur effet ? Jusqu'à quelle distance la force magnétique est-elle suffisante pour s'opposer au poids de l'aimant ? Pourtant il ne lévite pas : pourquoi ? Une toupie a la propriété de garder une direction à peu près fixe : quel est l'intérêt pour la lévitation, et donc qu'est-ce que Roy Harrigan avait en tête lorsqu'il essayé d'utiliser une toupie ?

23.3. Échec de l'explication naïve. En supposant que la direction de la toupie reste exactement verticale, donnez l'expression de l'énergie potentielle totale de la toupie. Montrez que son laplacien est nul. Déduisez-en donc que l'énergie potentielle ne peut pas avoir de minimum. Pourquoi plusieurs physiciens ont-ils expliqué à Roy Harrigan qu'il est impossible de réaliser la lévitation magnétique en utilisant des aimants permanents ? Montrez qu'ils avaient raison, et énoncez précisément ce qui est impossible.

23.4. Explication correcte. Le moment magnétique $\vec{\mu}$ de la toupie est parallèle à son axe de rotation. Expliquez pourquoi cet axe de la toupie ne reste pas exactement fixe : en fait, il précesse, c'est-à-dire qu'il décrit lentement un tour autour de la direction de \vec{B} . Écrivez l'équation d'évolution de l'orientation de l'axe. Calculez la durée d'une période de précession. Puisque l'angle entre $\vec{\mu}$ et \vec{B} reste constant au cours de cette période de précession, montrez que la composante parallèle $\mu_{||} = \vec{\mu} \cdot \vec{B} / B$ reste aussi constante. Montrez que si la précession est assez rapide, on peut en déduire une expression moyenne de l'énergie potentielle, légèrement modifiée par rapport à la question précédente. Montrez que rien n'oblige son laplacien à être nul. Déduisez-en que rien n'interdit la lévitation de la toupie, et que Roy Harrigan avait raison de s'acharner.

23.5. Commentaires. Montrez que cet effet est extrêmement subtil. Expliquez pourquoi il faut autant de réglages ; et pourquoi il a fallu des années de tâtonnements pour trouver la bonne configuration, puis encore 12 ans avant de le commercialiser, et encore des années avant de mettre en vente une version robuste. Montrez pourquoi on n'avait encore jamais vu d'objets quotidiens qui lévitent sur une table, et comparez aux autres types de lévitation magnétique.

Problème 24 Ne ratez pas la mousse (corrigé à la page 231)



Figure 25 Pour se détendre, rien de tel qu'une petite mousse.

Manipulation. S'envoyer une mousse ne rend pas lourd. Prenez donc une bière ! Versez-la brusquement dans un verre pour fabriquer un gros faux-col. Vous pouvez aussi prendre une canette de bière et l'ouvrir brusquement (voir la figure 25). Tout aussi usuel, mais plus salissant, il y a la bouteille de soda que vous secouez violemment avant de l'ouvrir... Enfin, une dernière possibilité, la bouteille de champagne ou de mousseux qu'on sabre, c'est-à-dire que vous décapitez d'un coup sec avec un grand couteau : effet garanti, à étudier avec modération.

Dans tous ces cas, l'essai est facile à faire soi-même. Observez la détente d'une mousse qui sort d'un récipient. L'exemple que nous prendrons ici est la mousse à raser qui sort d'une bombe.

Vous observerez peut-être expérimentalement qu'au début, l'expansion est brusque ; ensuite, pendant environ une seconde, le volume continue à augmenter, mais plus lentement.

Énoncé. Au départ, le récipient est sous pression de quelques bars. Pour simplifier, on suppose que la mousse est déjà formée à l'intérieur : elle est constituée de bulles de gaz, bien séparées les unes des autres par du liquide. Cette simplification est peut-être justifiée au moins dans le cas des bombes de mousse à raser qu'on agite avant emploi. Brusquement, on expulse la mousse à l'air libre : son volume augmente rapidement. C'est à cette *détente* qu'on s'intéresse.

24.1. Expliquez pourquoi l'expansion est d'abord rapide, puis lente. Expliquez pourquoi on peut distinguer deux étapes différentes et discutez leur origine physique.

24.2. Durant la première étape, de combien augmente le volume de la mousse ? Décrivez l'état de la mousse à la fin de cette étape. Faites l'application numérique, commentez.

24.3. Même question au cours de la deuxième étape.

24.4. Y a-t-il une troisième étape ?

Problème 25 Comment évolue le rond quand le robinet coule plus fort ? (corrigé à la page 237)



Figure 26 Photo du rond au fond d'un évier

Manipulation. Très facile, et presque indispensable pour faire l'exercice. Il vous faut un lavabo ; ou mieux : un évier à fond bien plat, l'effet sera plus joli. Ouvrez le robinet : au fond de l'évier, vous voyez près du robinet une région où il y a très peu d'eau. Dans toute la région alentour, il y a bien plus d'eau. La limite entre ces deux régions est un ressaut, qui a la forme d'un rond (figure 26).

Avant de commencer l'exercice, n'hésitez pas à manipuler : bouchez ou débouchez l'évier, posez votre doigt dans l'une ou l'autre des régions, ouvrez ou fermez le robinet, jetez des miettes de pain dans l'eau pour essayer de visualiser et de mesurer la vitesse d'écoulement, etc.

Énoncé. L'objet de cet exercice est *uniquement de calculer le diamètre de ce rond*, en utilisant de la mécanique de base. On n'essaiera pas d'expliquer pourquoi ce ressaut rond se forme, ni ce qui se passe exactement dans l'eau au niveau de ce ressaut, à la transition entre les deux régions. En effet, ce serait un problème difficile de mécanique des fluides.

25.1. Déterminez quelle est la symétrie du problème. Combien y a-t-il de paramètres dans ce problème ? Combien d'inconnues ? Lesquelles nous intéressent, lesquelles ne nous intéressent pas ? Mesurez le diamètre du rond avec un double décimètre. Trouvez un moyen de mesurez toutes les autres quantités que vous jugerez utile.

25.2. Commencez d'abord par analyser le problème. Faites la liste des équations qu'on pourrait écrire (mais n'essayez pas de les écrire tout de suite !) : quels sont

les endroits intéressants, et quels bilans pouvez-vous y écrire ? Le nombre d'équations est-il celui que vous vouliez ?

25.3. Maintenant, écrivez ces équations, une par une, soigneusement.

25.4. Simplifiez ces équations en faisant des approximations pertinentes. Déterminez le rayon du rond en fonction des différents paramètres du problème.

25.5. Déterminez la valeur numérique du rayon, et comparez avec celle que vous voyez sous vos yeux.

Problème 26 Moteur à flotte : (1) la reine de l'éjection

(corrigé à la page 247)

Manipulation. Il existe de petits modèles jouets de fusée à eau (voir la figure 27). Vous pouvez aussi vous en fabriquer, cela demande une certaine préparation. Il vous faut une bouteille de plastique solide, type bouteille d'eau minérale pétillante ou de soda de 1,5 ℓ , à laquelle vous pouvez fixer des ailerons.

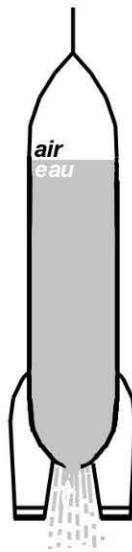


Figure 27 L'éjection pour les rigolos.

Versez de l'eau dans la fusée, puis avec une pompe, par exemple une pompe à vélo, introduisez de l'air sous pression. Mettez en bas un bouchon solide que vous puissiez déboucher d'un coup sec. L'eau sort, la fusée monte.

Énoncé. Le but est de faire une fusée qui monte le plus haut possible. La question est donc : sur quels paramètres peut-on jouer pour améliorer la fusée, quelle est la meilleure valeur possible de ces paramètres, et donc quelle hauteur atteint-on ?

26.1. Discutez physiquement ce qui se passe. Faites la liste des grandeurs physiques qui interviennent, en précisant celles qui sont constantes et celles qui augmentent avec le temps, ou celles qui diminuent. Donnez-leur des notations.

26.2. Comptez combien d'équations vous pourrez écrire (en particulier des équations de conservation), et comptez s'il y a autant d'équations que d'inconnues. Choisissez-vous d'écrire les forces ou l'énergie (voir page 7) ?

26.3. En faisant des simplifications judicieuses, écrivez (sans les résoudre) les équations qui décrivent l'évolution en fonction du temps des différents paramètres intéressants. Vérifiez-les soigneusement : homogénéité, signes, comportements limites (toujours sans les résoudre exactement).

26.4. Distinguez l'étape de poussée, tant qu'il y a de l'eau, et l'étape balistique, quand la fusée est vide. Laquelle des deux étapes est la plus longue ? Pouvez-vous évaluer approximativement la hauteur maximale atteinte par la fusée ? Discutez comment choisir au mieux les valeurs initiales des paramètres.

Problème 27 Moteur à flotte : (2) Ce drôle d'oiseau qui se branche à l'eau (corrigé à la page 257)

Observation. Qui a bu, boira. L'« oiseau buveur » est un gadget de salon dont la mode revient périodiquement (voir p.11).

Il est vertical (voir la figure 28(a)). Pour le faire démarrer, on le penche, pour tremper son bec dans un verre d'eau (voir la figure 28(b)). Il se redresse alors verticalement (voir la figure 28(a)). Le ventre de l'oiseau est plein d'un liquide coloré (représenté en gris foncé sur la figure 28). On voit le niveau du liquide coloré monter lentement. Quand le liquide atteint presque la tête de l'oiseau, celui-ci se met à osciller d'avant en arrière, de plus en plus. Il finit par basculer vers l'avant, et son bec trempe dans l'eau. Le cycle recommence, apparemment sans se lasser, pendant des heures et des jours.

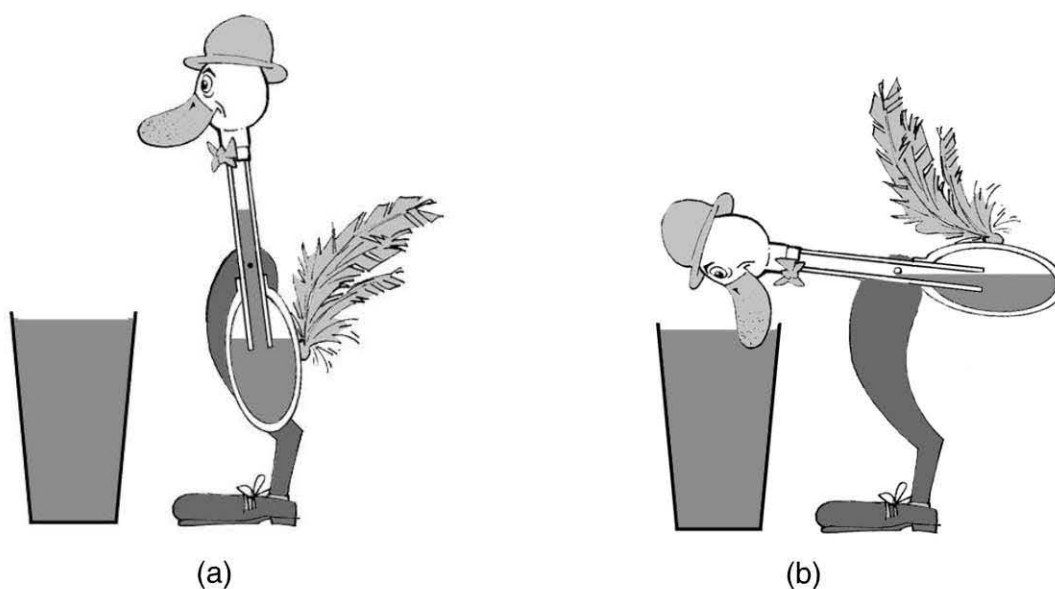


Figure 28 Vite, à boire !

Mesures. Si l'on dispose de l'objet, on peut préciser quelques éléments :

- Les dimensions : l'oiseau consiste essentiellement en deux bulbes (le ventre, de 2,8 cm de diamètre, et la tête, de 2 cm de diamètre) reliés par un tube (le cou), un cylindre de diamètre 8 mm et de 10 cm de haut. La hauteur maximale de montée du liquide coloré (c'est-à-dire la différence de hauteur entre la surface du liquide dans le ventre et dans la tête) est $h = 10$ cm.
- La tête de l'oiseau est étanche et fermée. Il n'y a pas de communication entre l'eau du verre et le liquide coloré du ventre de l'oiseau. L'oiseau ne boit donc pas l'eau.
- En revanche, la tête et le bec de l'oiseau sont couverts d'une feutrine (surface visible : environ 15 cm^2) qui reste en permanence imbibée d'eau. C'est visiblement indispensable au fonctionnement de l'oiseau. Pour amorcer le mouvement de l'oiseau, au départ, il faut imbiber abondamment la feutrine. Ensuite, en régime permanent, l'oiseau utilise environ 6 cm^3 d'eau par jour.
- La périodicité : entre deux instants où l'oiseau trempe son bec, il s'écoule entre une et trois minutes. Cette durée est extrêmement variable et irrégulière ; en moyenne, elle vaut environ une minute et demie. Elle est essentiellement déterminée par le temps de montée du liquide dans le cou de l'oiseau. En effet l'étape où l'oiseau se penche, trempe son bec et remonte, ne dure que quelques secondes.

Énoncé. L'objet du problème est de comprendre le principe de fonctionnement de l'oiseau, dans l'esprit des questions de la page 9.

27.1. Comment ai-je mesuré la consommation d'eau de l'oiseau, en l'occurrence 6 cm^3 d'eau par jour ? Proposez une méthode d'expérience.

27.2. Est-ce que l'oiseau viole un principe de la thermodynamique ? Discutez comment se transforme l'énergie. Y a-t-il une source d'énergie ? Quel est le rôle de l'eau ?

27.3. Alors, pouvez-vous expliquer physiquement comment fonctionne l'oiseau ? Expliquez quelles sont les différentes étapes de son cycle.

27.4. Faites le bilan thermodynamique du cycle : énergie, entropie. Calculez la puissance de l'oiseau, le taux de production de l'entropie, l'efficacité du système. Estimez leurs valeurs numériques et commentez-les physiquement.

27.5. Pourquoi la durée du cycle est-elle variable ?

Problème 28 L'insecte et les deux sons qu'il émet (corrigé à la page 263)

Observation. Dans les boutiques spécialisées de jeux en bois (voir p. 11), on trouve de petits animaux qui descendent une pente : coccinelle, vache, éléphant, cochon, voire dinosaure. Attention : seuls les objets de bonne qualité sont pleinement satisfaisants.

On pose la coccinelle en haut d'un plan incliné (voir la figure 29). Elle se met à osciller, s'appuyant alternativement sur la patte avant et arrière. Elle avance ainsi sur son plan incliné, sans jamais glisser, et descend jusqu'en bas. À chaque oscillation elle produit un bruit sonore très régulier : « clic-clac ». Ainsi, on constate à l'oreille que son avance est périodique, et non accélérée.

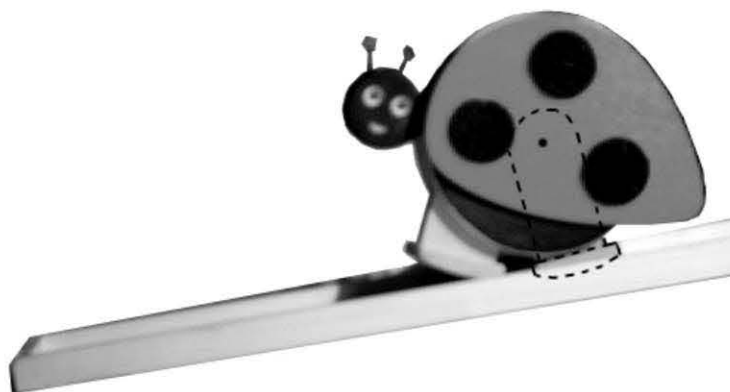


Figure 29 Une coccinelle sur la pente descendante.

Si vous possédez une telle coccinelle, vous pouvez l'examiner de près. Il n'y a aucun ressort ni pièce cachée particulière. L'ensemble du corps et la patte avant forment un seul bloc solide. Seule la patte arrière est mobile, autour d'un axe horizontal situé vers le centre du corps de la coccinelle. C'est elle qui produit le bruit « clic » ou « clac », à chaque fois qu'elle vient buter à un bout ou l'autre de sa course.

Mesures. On peut prendre quelques mesures :

- La coccinelle est essentiellement un disque de 9 cm de diamètre et 2 cm d'épaisseur. Il s'y rajoutent les deux pattes et quelques éléments décoratifs : queue, tête, gros ronds noirs.
- La coccinelle met 12 s, soit 16 périodes, pour parcourir le plan incliné. Celui-ci mesure 36 cm de long. Son extrémité est à 5,4 cm de hauteur, soit une inclinaison $\alpha = 9^\circ = 0,15 \text{ rad}$.
- En modifiant la pente du plan incliné, on voit que la coccinelle fonctionne quand α est entre 6° et 12° . Si le plan est incliné de moins que $6^\circ = 0,1 \text{ rad}$, la coccinelle n'avance pas. Si l'angle est supérieur à $12^\circ = 0,2 \text{ rad}$, elle bascule vers l'avant ou se met à glisser.
- Le dessous des deux pattes forme un arc de cercle (voir la figure 29). Elles restent sur le même cercle même lorsqu'elles sont écartées.

On peut estimer le rayon de ce cercle, c'est-à-dire le rayon de courbure du dessous des pattes, en posant la coccinelle sur une table (voir pages 9 et 218). Quand l'arrière d'une patte touche la table, l'avant, situé 3,3 cm plus loin, est à 5 mm au-dessus de la table : le rayon de courbure est d'environ $(3,3 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 / (2 \times (5 \cdot 10^{-3} \text{ m})) \approx 0,1 \text{ m}$, soit 10 cm.

Énoncé. L'objet de ce problème est de comprendre les grandes lignes du fonctionnement de la coccinelle, sans rentrer dans le détail de chacune des étapes du mouvement (voir « Notes » page 268).

28.1. Faites le bilan thermodynamique de la descente de la coccinelle : énergie, entropie.

28.2. Reprenez les questions de la page 9 et analysez les oscillations :

- Y a-t-il une source d'énergie extérieure, ou est-ce une oscillation libre ?
- Est-ce une oscillation périodique ? Si oui, pouvez-vous identifier pourquoi il y a une période bien définie ?
- S'agit-il d'oscillations autour d'un seul état d'équilibre stable (ce qui permet des oscillations harmoniques), d'un état d'équilibre instable (l'oscillation tendra à s'amplifier) ou bien une oscillation entre deux états limites non stables (oscillations de relaxation) ?

28.3. Mettez en équation l'une de ces étapes du mouvement, et étudiez-la autant que vous pouvez. L'étape la plus simple est celle où la patte arrière reste collée contre la patte avant : on peut alors traiter la coccinelle comme un solide indéformable, d'un seul tenant.

Problème 29 Soyez précis avec le vent (corrigé à la page 270)

Manipulation. Si vous pratiquez la voile ou la planche à voile, vous savez certainement choisir, en fonction du vent, le cap le plus adapté. Ce que vous vous contentez de faire intuitivement, essayez de l'analyser. Pouvez-vous expliquer quelle est la stratégie optimum lors d'une régate ? Quand décidez-vous de tirer des bords ? Quand deux bateaux sont côte-à-côte, comment savez-vous lequel est en avance sur l'autre ?

Énoncé. Considérez un bateau à voile (voir la figure 30). Selon qu'il a le vent de face, de côté ou de dos, sa vitesse instantanée est différente. Pour se rendre en un point déterminé, il n'a pas nécessairement intérêt à choisir la ligne droite. L'objet de ce problème est de comprendre la stratégie optimale.

29.1. Le vent exerce sur le bateau une force qui a deux composantes :

- La *poussée*, force parallèle au vent. Elle fait avancer le bateau dans le sens du vent. C'est pourquoi il ne peut pas aller exactement contre le vent, ni même à quelques dizaines de degrés de part et d'autre de la direction d'où vient le vent.

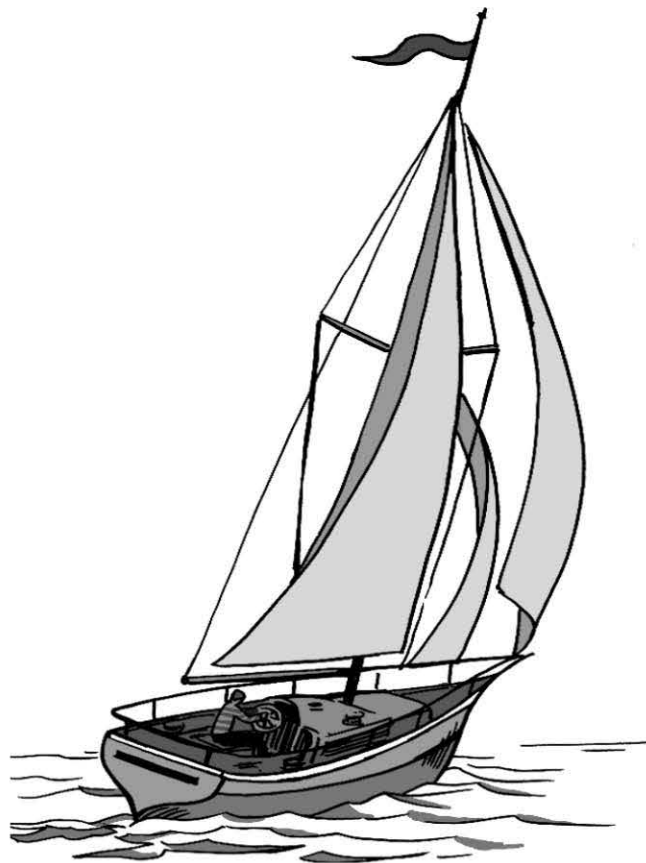


Figure 30 Quelle est la vitesse de ce bateau ? et quelle est sa lenteur ?

- La *portance*, force perpendiculaire au vent. Elle est dirigée de l'intérieur vers l'extérieur de la concavité de la voile. À condition d'orienter judicieusement la voile, la portance favorise l'avance du bateau dans une direction perpendiculaire au vent. Elle est analogue à la force qui permet aux avions de voler.

Tracez l'allure du « diagramme de vitesse » du bateau : c'est le diagramme polaire $v(\theta)$, où $v = |\vec{v}|$ est le module de la vitesse instantanée du bateau, et θ l'angle qu'elle fait avec la vitesse du vent (en supposant qu'à tout moment on oriente la voile le mieux possible). Comment ce diagramme varie-t-il si le vent tourne ou faiblit ?

29.2. Si le bateau part d'un point \vec{r}_0 au temps t_0 , on définit la fonction « durée » comme le temps minimal qu'il lui faut pour aller jusqu'à la position \vec{r} . On définit la « lenteur » du bateau comme le gradient de cette fonction durée. Analysez ces deux quantités : quelles sont leurs dimensions ? s'agit-il de scalaires, de vecteurs ? Quand on fait une course, quelle est la quantité qu'on cherche à optimiser ?

29.3. Démontrez que la lenteur et la vitesse instantanée n'ont aucune raison d'être parallèles, mais par contre qu'il existe une relation entre elles : le long d'un trajet optimum, leur produit scalaire est toujours égal à 1. Attention : cela demande d'être soigneux. À partir du diagramme de vitesse instantanée, pouvez-vous déterminer comment sélectionner la lenteur optimale ?

29.4. Dans le cas où le vent est constant et uniforme, comment choisissez-vous la meilleure stratégie ? Quand décidez-vous de tirer des bords (changer de direction, et donc changer l'orientation de la voile) ? Quand deux bateaux sont côte-à-côte, comment savez-vous lequel passera le premier la ligne d'arrivée ?

29.5. Dans le cas général, où le vent est variable, est-il encore possible de définir la meilleure stratégie ?

29.6. Pouvez-vous montrer l'analogie de ce problème avec l'optique ? Quels sont les points communs, les différences ? Cette analogie est-elle profonde ou superficielle ?

Problème 30 La mousse étalée (corrigé à la page 275)

Manipulation. L'expérience, assez jolie, est très facile. Versez quelques gouttes de liquide vaisselle dans un peu d'eau, et remuez : vous obtenez une mousse. Prenez-la (sans prendre trop d'eau avec) et déposez-la sur une assiette, ou sur n'importe quelle autre surface bien plate. Pour mieux l'observer, posez dessus une autre surface plate, transparente : un morceau de vitre, ou un verre à fond bien plat. Écrasez la mousse : elle s'étale (figure 31) et forme ce qu'on appelle une mousse « à deux dimensions ». Si vous avez pris soin de ne pas mettre trop d'eau, vous obtiendrez des bulles bien visibles séparées par des parois fines. Posez-la sous une bonne lampe, et laissez-la reposer en regardant de temps à autre si elle évolue, pendant que vous attaquez l'exercice.

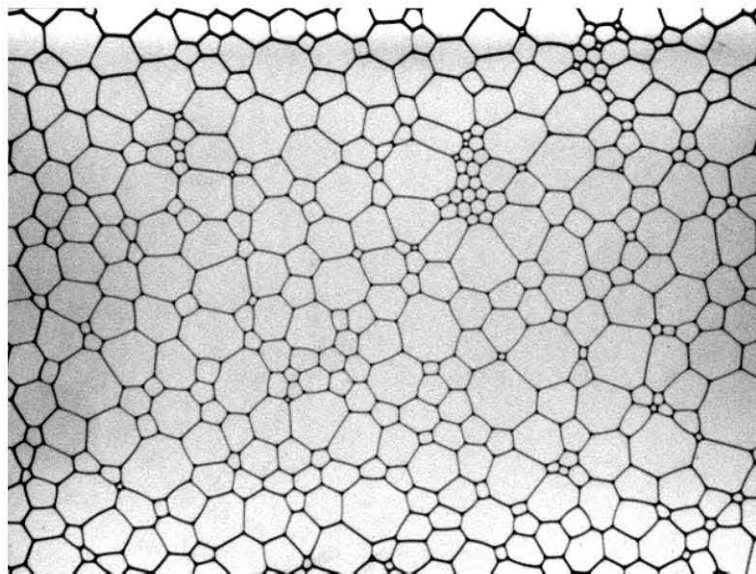


Figure 31 Une mousse « à deux dimensions » comprimée entre deux plaques de verre. Taille de l'image : 10 cm.

Énoncé. Contrairement à l'exercice 25, ici nous allons étudier une mousse bien calme, à l'équilibre, et « à deux dimensions » pour simplifier.

Les parois sont faites de liquide, en l'occurrence de l'eau savonneuse. L'énergie totale de la mousse est proportionnelle à la somme des longueurs de toutes les parois :

$$E = \gamma \sum l. \quad (1)$$

La somme des longueurs des parois tend ainsi à diminuer. Chaque paroi est donc sous tension, et sa tension vaut γ . Le facteur γ s'exprime en $\text{J} \cdot \text{m}^{-1}$ (voir « Notes », page 282). Les bulles sont faites de gaz, en l'occurrence de l'air. Comme les bulles ne communiquent pas, leurs pressions peuvent différer. L'équilibre est atteint quand la tension des parois, qui tendrait à rétracter la mousse, et la pression des bulles, qui pousse vers l'extérieur, se compensent exactement.

Une telle mousse suscite une série de questions, relativement indépendantes.

30.1. Écrivez la condition d'équilibre d'un sommet en utilisant soit les forces, soit l'énergie. Les parois se rencontrent 3 par 3 aux sommets : pourquoi font-elles des angles de 120° et pas d'autres angles ?

30.2. Il existe une relation (qu'on admettra, mais qu'on peut essayer de vérifier sur des exemples) entre les nombres de bulles, de parois et de sommets :

$$N_{\text{bulles}} - N_{\text{parois}} + N_{\text{sommets}} = 1. \quad (2)$$

Utilisez cette relation, due à Euler, et le fait qu'il y a 3 parois et donc 3 bulles par sommet. Déduisez-en que dans une grande mousse, c'est-à-dire dont le nombre N_{bulles} est grand, le nombre moyen de voisines d'une bulle tend vers 6.

30.3. Écrivez que, quand on suit le contour de la bulle et qu'on revient à son point de départ, le vecteur tangent au contour a tourné de 2π . Reliez cela à l'angle dont tourne le vecteur tangent à chaque sommet de la bulle. Si une bulle a un nombre de sommets autre que 6, montrez qu'elle a nécessairement des parois courbées. Calculez l'intégrale de la courbure le long du contour de la bulle : quel est son signe ? de quoi dépend-il ?

30.4. À l'équilibre, deux bulles voisines de pression P_1 , P_2 sont séparées par une paroi de courbure κ_{12} telle que l'effet de la tension et l'effet de la différence de pression se compensent exactement. Admettez que la condition d'équilibre (loi de Laplace) est :

$$P_1 - P_2 = \gamma \kappa_{12} \quad (3)$$

où κ_{12} est la courbure algébrique. Comment oriente-t-on le signe de κ_{12} ? Pouvez-vous interpréter physiquement cette relation d'équilibre ? Montrez que chaque paroi est un arc de cercle. Si trois parois se rencontrent au même sommet, montrez que la somme de leurs courbures est nulle.

30.5. En regroupant les questions précédentes, reliez la pression d'une bulle et son nombre de voisines.

30.6. Les parois sont légèrement perméables et laissent un peu passer le gaz d'une bulle à l'autre. Admettez que le flux de gaz d'une bulle à l'autre est proportionnel à leur différence de pression (ne cherchez pas à expliciter la constante de proportionnalité). Comment varie l'aire d'une bulle avec le temps ? Comment la mousse va-t-elle évoluer ?

Corrigés des problèmes

Corrigé 1 Choisissez-vous la fine ou l'épaisse ? (Énoncé à la page 13)

Commentaire. La difficulté de ce problème est que l'énoncé est très court. Vous devez donc le séparer en sous-questions pour le résoudre par étapes. Comment ferez-vous ?

Première approche. Que se passe-t-il ? À première vue, un yoyo lâché sans vitesse initiale va transformer de l'énergie potentielle en énergie cinétique : translation, rotation. C'est donc un exercice classique (voir page 7) :

- Déterminez le nombre de degrés de libertés.
- Choisissez le référentiel et les notations.
- Étudiez d'abord la cinématique en étudiant où intervient le diamètre de la ficelle.
- Puis passez à la dynamique, choisissez entre l'énergie et la force.
- Écrivez les équations en étudiant à nouveau où intervient le diamètre de la ficelle.
- Regardez si vous pouvez les résoudre analytiquement, graphiquement ou numériquement.
- Discutez les équations et leurs solutions.

Analyse qualitative. Pouvez-vous repérer où intervient le diamètre de la ficelle ? Réfléchissez bien : ce que vous devez faire, c'est comparer le yoyo à ficelle réelle avec un yoyo imaginaire qui aurait une ficelle extrêmement fine. Manipulez donc le yoyo, essayez de l'imaginer avec une ficelle plus épaisse, ou au contraire avec une ficelle très fine.

On voit d'abord qu'une ficelle plus grosse s'enroule plus régulièrement, sans s'entortiller ; ce n'est pas la question ici. L'effet essentiel sur la vitesse, donc qui

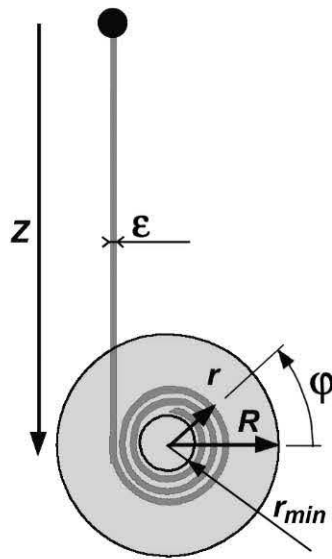


Figure 32 La ficelle fait un enroulement dont le rayon r grossit de ε à chaque nouveau tour.

nous intéresse, c'est le suivant : quand la ficelle s'enroule autour du moyeu du yoyo, cela fait augmenter le diamètre du moyeu (voir la figure 32). Or : est-ce que le diamètre du moyeu a un rôle important ? On verra que oui.

Simplifications. Cela doit vous guider pour décider quelles simplifications vous pouvez faire : demandez-vous ce qui joue pour la question posée.

- Pouvez-vous proposer tout de suite de traiter ce problème comme s'il était à une dimension ? C'est tout à fait raisonnable. Certes, le yoyo peut se balancer, ou se tortiller sur lui-même, mais on ne voit pas en quoi cela jouerait sur la réponse à la question posée.
- Pouvez-vous négliger l'élasticité de la ficelle ? Certainement, car elle n'est pas extensible.
- Pouvez-vous négliger la masse de la ficelle ? La réponse n'est pas évidente, et on y reviendra donc plus tard.
- Pouvez-vous négliger les frottements ? Il y en a certainement : on les entend, puisque le yoyo ronfle quand il tourne vite (voir page 6) ; on les voit, puisque le yoyo ne remonte pas spontanément à sa hauteur initiale. On conçoit qu'une partie de ces frottements est liée à l'air ; l'autre est un frottement solide de la ficelle sur le yoyo, qui peut dépendre du fait que la ficelle touche le yoyo ou non. Cependant, ici, pour comparer le yoyo à ficelle réelle avec un yoyo imaginaire qui aurait une ficelle extrêmement fine, commencez sans tenir compte des frottements, et vérifiez *a posteriori* si ce choix est pertinent.

Cinématique. Quelle condition cinématique peut-on écrire ? La ficelle reste tendue, et elle se déroule sans glissement. La vitesse verticale du yoyo \dot{z} est donc sa vitesse angulaire $\dot{\varphi}$ multipliée par le rayon... le rayon de quoi, au fait ? Eh bien, le rayon r

sur lequel est enroulée la ficelle. Avec quel signe ? Sur la figure 32, z et φ sont positifs ; quand le yoyo descend, $\dot{z} > 0$ et $\dot{\varphi} < 0$, donc :

$$\dot{z} = -r\dot{\varphi}. \quad (4)$$

Peut-on intégrer brutalement cette équation (4) ? Certainement pas : en effet, r varie avec le temps, de même que z . Il faut donc écrire une deuxième équation cinématique. À chaque tour, r diminue d'une quantité ε qui est le diamètre de la ficelle. Or, en un tour, φ diminue de 2π :

$$\varphi \rightarrow \varphi - 2\pi \quad \rightsquigarrow \quad r \rightarrow r - \varepsilon. \quad (5)$$

Cette équation (5) est valable une fois par tour (description discrète) : pouvez-vous la mettre sous une forme valable à tout instant (description continue), donc plus utilisable ? Il y a deux possibilités :

– On peut d'une part réécrire l'équation (5) sous une forme intégrale :

$$r = r_{\min} + \frac{\varepsilon}{2\pi} \varphi, \quad (6)$$

où r_{\min} est le rayon du moyeu et $\varphi = 0$ quand le yoyo est tout en bas, auquel cas $z = L$, longueur totale de la ficelle déroulée.

– De façon équivalente, on peut réécrire l'équation (5) sous une forme différentielle :

$$\frac{\dot{r}}{\varepsilon} = \frac{\dot{\varphi}}{2\pi}. \quad (7)$$

Entre ces deux formes (équations (6) et (7)), laquelle sera la plus utile ? Vaut-il mieux grouper les deux équations (4) et (6), pour avoir par exemple z en fonction de r , ou de φ ? On ne sait pas encore. Ce qui compte à ce stade, c'est qu'il s'agit d'un problème à un seul degré de liberté : en effet les trois variables z , r , φ sont reliées par deux équations.

Dynamique. Énergie ou force ? C'est un problème à un degré de liberté, sans frottements : aucune hésitation, il faut utiliser l'énergie mécanique et écrire qu'elle est constante. En faisant attention au signe de z (positif vers le bas), et en notant m et J la masse et le moment d'inertie du yoyo, elle s'écrit :

$$E = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 - mgz = \text{constante} = 0. \quad (8)$$

En effet, en $z = 0$, le yoyo n'a pas de vitesse initiale, donc la constante est nulle. Entre r , φ et z , quelles sont les deux variables qu'on élimine, et quelle est celle qu'on garde ? Il vaut mieux garder z : non seulement parce que c'est la variable qui

nous intéresse en pratique quand on joue au yoyo ; mais aussi parce que c'est simple d'éliminer $\dot{\varphi}$ de l'équation (8) .

Comment faire ? Puisque l'équation (4) nous donne $\dot{\varphi} = -\dot{z}/r$, l'équation (8) devient :

$$\left[1 + \frac{J}{mr^2}\right] \dot{z}^2 = 2gz. \quad (9)$$

On vérifie tout de suite que c'est homogène : J/mr^2 est sans dimension, \dot{z}^2 et gz sont tous deux en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. Le signe est également correct : quand le yoyo descend (z augmente), il accélère (\dot{z} augmente).

Comportement. On voit déjà l'essentiel de la physique. Le terme J/mr^2 est ce qui différencie le yoyo de la chute libre : il décrit la fraction d'énergie qui passe sous forme d'énergie cinétique de rotation ; plus il est grand, c'est-à-dire plus la ficelle est fine, plus la translation du yoyo est lente.

Pour continuer, il suffit d'exprimer r en fonction de z , donc d'éliminer φ de l'équation (4), ce qui est facile grâce à l'équation (7) (plutôt qu'avec l'équation (6)). On obtient :

$$-dz = \frac{2\pi}{\varepsilon} r dr,$$

ce qui s'intègre en tenant compte des constantes :

$$L - z = \frac{\pi}{\varepsilon} (r^2 - r_{\min}^2),$$

ou encore :

$$r^2 = r_{\min}^2 + \frac{\varepsilon}{\pi} (L - z). \quad (10)$$

En réintégrant $r(z)$ (équation 10) dans l'équation (9), on obtient \dot{z} en fonction de z seulement (le temps n'apparaît pas, car on a utilisé l'énergie) :

$$\dot{z} = \sqrt{2gz} \left[1 + \frac{J/m}{r_{\min}^2 + \frac{\varepsilon}{\pi} (L - z)} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Pour un mauvais yoyo imaginaire en chute libre, le crochet serait remplacé par 1. Pour un excellent yoyo imaginaire à ficelle infiniment fine, $\varepsilon = 0$, donc le crochet vaudrait $1 + J/mr_{\min}^2$. Le yoyo réel est quelque part entre ces deux extrêmes.

La quantité J/m est de l'ordre de $R^2/2$, où R est le rayon extérieur du yoyo. On voit que la performance du yoyo, donc l'effet de la rotation pour ralentir la chute, augmente avec R/r_{\min} , ce qui explique la forme du yoyo : un grand diamètre pour augmenter le moment cinétique, mais un petit moyeu pour enrouler la ficelle.

Valeurs numériques. On peut tracer ces expressions. Pour cela, il faut évaluer les valeurs numériques. Mon yoyo mesure $R = 2,7$ cm, et il est à peu près homogène, donc il est inutile de mesurer la masse : je garde l'estimation $J/m \approx R^2/2$. Je mesure sur le moyeu nu $r_{\min} = 0,4$ cm, et quand on y enroule la ficelle sur toute sa longueur $L = 82,5$ cm, on mesure $r = 1,6$ cm. D'après l'équation (10), on en déduit que $\varepsilon = (1,6^2 - 0,4^2) \pi / 82,5 = 0,09$ cm, soit 0,9 mm : cette mesure est plus précise que l'estimation à l'œil nu, où l'on aurait dit environ 1 mm.

Avec ces valeurs, on obtient la figure 33. On voit que le yoyo réel et le yoyo idéalisé se rencontrent en deux points. D'abord au départ, puisque la vitesse initiale est nulle. Ensuite à la fin, puisque le rayon est le même : on trouve $0,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, soit de l'ordre de $0,8/4 \cdot 10^{-3} = 200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$: 30 tours par seconde. Entre les deux, le yoyo réel a deux fois moins d'« effet yoyo », donc va environ deux fois plus vite que le yoyo idéalisé. Donc, pour que votre yoyo descende lentement, choisissez une ficelle fine.

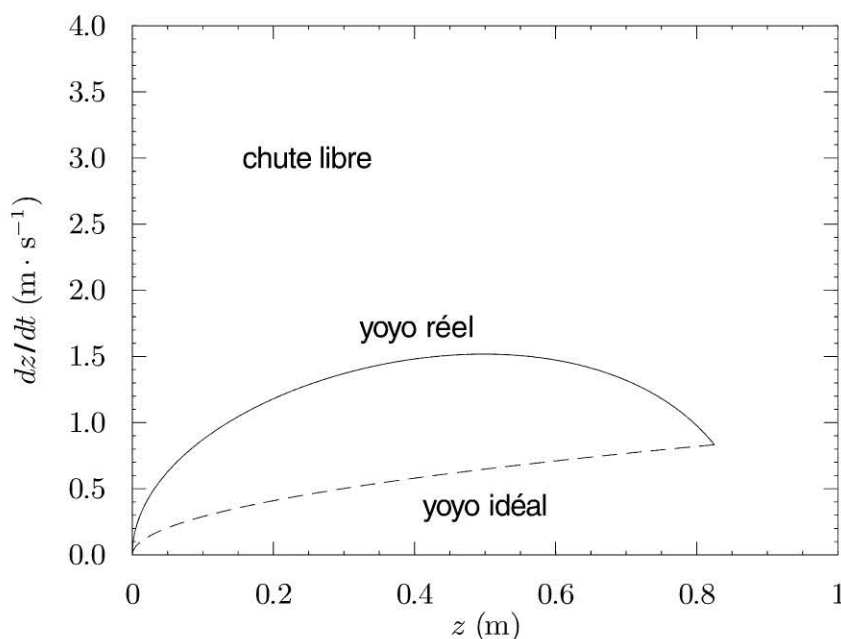


Figure 33 Vitesse de chute dz/dt du yoyo, en fonction de sa position z .

La courbe est tracée ici avec l'équation (11) et les valeurs indiquées dans le texte. Le yoyo réel est toujours plus rapide, donc moins performant, que le yoyo à ficelle idéalement fine. Avec une ficelle encore plus grosse, le yoyo se rapprocherait encore de la chute libre.

Retour sur les simplifications. Était-il utile de négliger les frottements ? Oui, cela rend plus visuelle la comparaison entre le yoyo réel à ficelle épaisse, et le yoyo idéal. Tenir compte des frottements n'aurait servi qu'à décrire plus précisément la valeur de la vitesse, pas à mieux comprendre la physique.

Même chose pour la masse de la ficelle. Si l'on en tenait compte, cela changerait légèrement la valeur de J/mr^2 , et rendrait les calculs plus compliqués, mais sans ajouter rien d'essentiel.

Enfin, pouvez-vous dire si la vitesse est réellement verticale ? Voici un argument pour répondre. On peut prendre comme système le yoyo sans sa ficelle : s'il est lâché sans vitesse initiale, donc si initialement la ficelle est verticale, alors la tension de la ficelle est verticale. Comme l'autre force qui s'exerce sur le yoyo est la gravité, verticale elle aussi, le barycentre du yoyo a une accélération verticale, donc sa vitesse reste verticale et la ficelle aussi : il n'y a pas de raison que cela change !

Notes. L'énoncé ne demande pas la durée de la chute. On peut la calculer facilement dans le cas du yoyo idéalisé ($\varepsilon = 0$), puisqu'alors l'équation (11) devient à variables séparables, $dt = C dz / \sqrt{2gz}$, d'où le temps de chute t_c :

$$t_c = C \sqrt{\frac{2z}{g}},$$

avec :

$$C = \left[1 + \frac{J}{mr_{\min}^2} \right]^{1/2} = \left[1 + \frac{R^2}{2r_{\min}^2} \right]^{1/2}. \quad (12)$$

Numériquement, la constante C vaut environ 5. Au lieu du temps de chute libre $t_l = \sqrt{2z/g} = 0,4 \text{ s}$, le yoyo idéal tombe donc en un temps $t_c = Ct_l = 2 \text{ s}$. Le yoyo idéal a donc exactement le mouvement d'un objet en chute libre avec une gravité g/C^2 réduite 25 fois !

Le yoyo réel est à mi-chemin entre les deux. Pour trouver la valeur exacte du temps de chute t_c , il faut une intégration numérique par ordinateur, voir l'article [1]. Pour trouver une valeur approximative, il suffit de reprendre l'équation (12) et de remplacer r_{\min}^2 par la valeur moyenne de r^2 , soit

$$\langle r \rangle = r_{\min}^2 + \varepsilon L / 2\pi = 1,34 \text{ cm},$$

donc $C = 1,74$ et $t_c = 0,7 \text{ s}$.

Remarquez que, même pour cette question, il est inutile de passer par les forces ! L'énergie est une méthode nettement plus simple, même pour avoir le temps de chute, ou l'équation du mouvement $z(t)$, voir page 7.

Ouvertures. On peut poser d'autres problèmes pour aller plus loin :

- Que se passe-t-il quand le yoyo arrive en bas et fait demi-tour ? Combien de temps dure le demi-tour ? La vitesse reste-t-elle verticale ? Le mouvement est-il régulier ou singulier (voir page 191) ?

- Quel est le rôle du mouvement de la main ? Quand faut-il la lever, la baisser ?
- On peut analyser les yoyos qui permettent la roue libre. Il y a d'abord les yoyos américains : au lieu d'être serrée sur le moyeu, la ficelle forme une boucle assez lâche autour de lui ; en arrivant en bas de sa course, le yoyo n'est plus tenu, et il tourne librement. Il existe aussi des yoyos à débrayage, sur un principe que Citroën a utilisé pour des embrayages de voitures 2 CV : ils contiennent deux masselottes qui s'écartent quand la force centrifuge devient assez grande, parce que le yoyo en bas de sa course a acquis une grande vitesse de rotation ; voir article [1].

Sources et références

L'article [1] donne un grand nombre de mesures. Ainsi, il détermine J en laissant rouler le yoyo sur un plan incliné. Comme son yoyo est à débrayage, il contient deux masselottes, donc J et m sont plus élevés qu'ici, et J/m est nettement inférieur à $R^2/2$.

- [1] C. DE IZARRA. Mécanique du yo-yo à débrayage. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, volume 93, novembre 1999, pages 1647-1657.
- [2] La physique du yo-yo. *Pour la Science*, volume 256, février 1999, pages 94-95. Article repris quasiment à l'identique dans [3]
- [3] *Yo-yo, billard, boomerang : la physique des objets tournants*. Bibliothèque Scientifique Belin – Pour La Science, Paris, 2001,

Corrigé 2 Reculer sans s'enfermer (Énoncé à la page 14)

► Question 2.1

Commentaire. La difficulté ici est de savoir quelles équations poser (voir page 7). En particulier, est-ce un problème qui porte sur les vitesses (cinématique) ou sur les forces et accélérations (dynamique) ?

Première approche. On a envie de répondre que c'est les deux à la fois : la vitesse et les changements de vitesse. Or, intuitivement, pouvez-vous vous représenter si l'un est plus important que l'autre ? Essayez de vous représenter mentalement ce qui se passe. On aimerait que la remorque suive bien sagement. On sent que le problème est que la remorque soit « contrôlable » ou non, et qu'il faudra arriver à définir ce terme avec précision.

Distinguez l'effet de la vitesse et de ses changements :

- Si c'est la vitesse qui joue un rôle, il doit y avoir une différence entre la marche avant, l'arrêt et la marche arrière. Or c'est bien ce qu'on constate en allant très lentement : la marche avant permet d'aligner la remorque ; la marche arrière la

fait partir sur le côté. Si vous arrêtez la voiture pour prendre le temps de réfléchir à votre manœuvre, la remorque reste à l'arrêt. En un certain sens, la remorque reste donc contrôlable.

- Si c'étaient les changements de vitesse qui intervenaient, on devrait voir des effets au démarrage, dans un tournant ou lors d'un freinage brusque. Or on sent qu'un freinage brusque fait partir la remorque sur le côté. Il y a donc aussi un problème dynamique lié à l'accélération, qu'on classerait volontiers comme « incontrôlable ».

Qu'est-ce qui fait la limite entre ces deux régimes ? Relisez la distinction entre cinématique et dynamique (page 7).

Analyse qualitative. Le critère de passage entre les deux régimes est le fait que la roue glisse ou non. La force de frottement sur le sol est ce qui permet à un engin de changer sa vitesse (sans ce frottement, on est condamné au mouvement rectiligne uniforme), voir page 6 :

- La roue reste contrôlable tant qu'elle roule sans glisser. C'est le régime normal, que l'énoncé demande d'étudier (2.2-2.4). Vous devrez donc supposer que la condition de non-glissement est vérifiée : vous l'exprimerez et étudierez en quoi cela contraint la trajectoire de la remorque.
- La remorque deviendrait incontrôlable si la roue commençait à glisser. Cela arriverait si le module $|\vec{F}_f|$ de la force de frottement de la roue sur le sol atteignait une certaine valeur : μmg , où μ est le coefficient de frottement (statique) de la roue sur le sol, m la masse de la remorque, et g l'accélération de la pesanteur. C'est donc au démarrage (patinage, enlisement), au freinage (verglas, aquaplanage), ou en tournant (sortie de route) qu'on risque le plus de glisser, ce qui serait une situation d'accident.

► Question 2.2.

Difficultés particulières. À première vue, en non-glissement, il s'agit d'un problème à deux degrés de liberté : la rotation des roues autour de leur essieu, la rotation globale de la remorque autour de la boule d'attelage sur la voiture. Il y a un paramètre : la vitesse de la voiture à un instant donné.

Ici encore, vous devrez tâtonner longtemps. Si vous allez voir directement à la fin de ce corrigé (équation (19)), vous verrez qu'en fait le problème est simple et que la démonstration tient en quelques lignes (équation (20)). Mais pour éviter de vous parachuter la solution, je préfère vous montrer comment j'ai tâtonné pour la trouver.

Notations. Choisir les notations ne pose pas de problème particulier. On peut proposer celles de la figure 34 : $(O, \hat{e}_X, \hat{e}_Y, \hat{e}_Z)$ est un repère lié à la voiture, $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ lié à la remorque, θ est l'angle entre \hat{e}_X et \hat{e}_x , $\dot{\theta} \hat{e}_z$ la rotation latérale de la remorque qui nous intéresse, $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_y$ la rotation d'une roue autour de son essieu. Choisissons par exemple la roue droite, voir « Notes ».

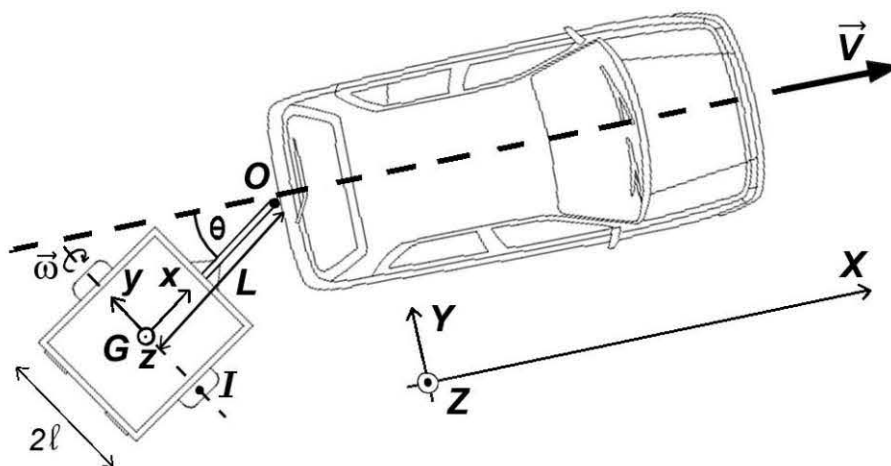


Figure 34

Notations : $OXYZ$ est lié à la voiture, $Gxyz$ est lié à la remorque. Le point C , centre de la roue droite, est à la verticale du point I , point de la roue qui touche le sol.

NB : les quantités $|\vec{F}_f|$, μ , m et g , sont des quantités dynamiques ; elles n'interviennent pas ici car on est dans le cas non-glissant (voir question 2.1).

Mise en équations. Vous pouvez par exemple écrire successivement : que la remorque est fixée à la voiture au point O ; que la caisse de la remorque ne se déforme pas ; et que la roue roule sans glisser.

- Puisque la remorque est attelée à la voiture, le point de la remorque situé en O a la vitesse instantanée :

$$\vec{v}(O) = \vec{V}. \quad (13)$$

- La caisse de la remorque ne se déforme pas, donc elle a une rotation solide, et le point C situé au centre de la roue droite a une vitesse donnée par :

$$\vec{v}(C) - \vec{v}(O) = \dot{\theta} \hat{e}_z \wedge \vec{OI} = \dot{\theta} (-L \hat{e}_y + l \hat{e}_x). \quad (14)$$

- Enfin, le roulement sans glisser exprime que le point I de la roue droite qui touche le sol a une vitesse nulle. Or la roue est un cercle de rayon R qui ne se déforme pas ; si sa rotation instantanée est $\vec{\omega} + \dot{\theta} \hat{e}_z$, on peut écrire :

$$\vec{v}(C) - \vec{0} = (\omega \hat{e}_y + \dot{\theta} \hat{e}_z) \wedge R \hat{e}_z = R \omega \hat{e}_x. \quad (15)$$

Regroupement. En rassemblant les équations (13), (14) et (15) on écrit :

$$R \omega \hat{e}_x - \vec{V} = \dot{\theta} (-L \hat{e}_y + l \hat{e}_x).$$

Pouvez-vous vérifier cette équation ? Les deux membres sont en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, donc elle est visiblement homogène. Pour les signes, on verra ci-dessous, quand on aura projeté.

On peut projeter cette équation sur \hat{e}_X et \hat{e}_Y :

$$\begin{aligned} R\omega \cos \theta - V &= \dot{\theta} (+L \sin \theta + l \cos \theta), \\ R\omega \sin \theta &= \dot{\theta} (-L \cos \theta + l \sin \theta). \end{aligned} \quad (16)$$

Il n'en sort rien d'évident. Essayons alors de projeter cette équation sur \hat{e}_x et \hat{e}_y :

$$R\omega - \vec{V} \cdot \hat{e}_x = \dot{\theta} l, \quad (17)$$

$$0 - \vec{V} \cdot \hat{e}_y = -\dot{\theta} L. \quad (18)$$

C'est nettement plus intéressant. En effet, tout se découple. Examinez séparément ces deux équations :

- L'équation (17) représente ce qui se passe le long de l'axe de traction. Elle donne la vitesse de rotation de la roue droite :

$$\omega = \frac{1}{R} [\vec{V} \cdot \hat{e}_x + \dot{\theta} l].$$

De même, la rotation de la roue gauche serait :

$$\omega' = \frac{1}{R} [\vec{V} \cdot \hat{e}_x - \dot{\theta} l].$$

Les signes et le comportement ont l'air corrects : $R\omega$ et $R\omega'$ sont de l'ordre de V , et ont le même signe que $\vec{V} \cdot \hat{e}_x$. En outre, quand la remorque avance avec $\theta > 0$ comme sur la figure 34, et $\dot{\theta} < 0$, alors la roue gauche tourne plus vite que la droite : $\omega' > \omega$, voir « **Notes** ». En effet, la roue gauche est à l'extérieur du virage, donc elle parcourt plus de chemin (sauf si la remorque roule en ligne droite, $\dot{\theta} = 0$). Mais cela n'a pas de lien avec ce que demande l'énoncé.

- Au contraire, l'équation (18) donne une réponse simple et directe à la question posée par l'énoncé :

$$\dot{\theta} = \frac{1}{L} \vec{V} \cdot \hat{e}_y = -\frac{V \sin \theta}{L}. \quad (19)$$

C'est une bonne nouvelle : $\dot{\theta}$ ne dépend que de θ , via les deux paramètres V et L . Les autres paramètres (ω , ω' , l) ont disparu. Cela prouve que le problème est en fait un problème à un seul degré de liberté, découplé de l'autre.

Commentaire. Pouvez-vous expliquer physiquement ce que veut dire cette équation (19) ? Reprenez l'équation (15) qui exprime le roulement sans glissement :

- La rotation instantanée de la roue est $\omega \hat{e}_y + \dot{\theta} \hat{e}_z$. Par produit vectoriel (équation (15)), sa composante sur y donne à la vitesse $\vec{v}(C)$ une composante sur x .
- Comme la remorque ne tangue pas (contrairement à un cycliste qui se penche dans un virage [1]), la rotation instantanée de la roue n'a pas de composante sur x . Donc la vitesse $\vec{v}(C)$ n'a pas de composante sur y .
- Comme la remorque ne décolle pas, la vitesse $\vec{v}(C)$ n'a pas de composante sur z .

Si l'on avait su ou compris cela plus tôt, il aurait suffi d'écrire que la vitesse du centre C de la roue est parallèle à \hat{e}_x :

$$0 = \vec{v}(C) \cdot \hat{e}_y = \vec{V} \cdot \hat{e}_y - L\dot{\theta}.$$

Cela démontre en une ligne l'équation (19).

Il y a une autre façon de dire la même chose : le non-glissement impose que $\dot{\theta}$ s'ajuste de façon à compenser la composante de \vec{V} suivant \hat{e}_y . Par conséquent :

$$\vec{v}(G) = \vec{V} - L\dot{\theta}\hat{e}_y = \vec{V} - (\vec{V} \cdot \hat{e}_y)\hat{e}_y = V_x\hat{e}_x. \quad (20)$$

La vitesse du milieu de la remorque est donc simplement la projection sur \hat{e}_x de la vitesse de la voiture. En projetant l'équation (20) sur \hat{e}_y on démontre l'équation (19).

► Question 2.3.

Simplifications. Pouvez-vous proposer des simplifications avant de résoudre ?

- Cette équation (19) est à variables séparables :

$$\frac{d\theta}{\sin \theta} = -\frac{V(t)}{L} dt = -\frac{ds}{L}, \quad (21)$$

où $ds = V(t) dt$ est l'abscisse curviligne parcourue par la voiture pendant le temps dt .

- Il s'agit d'un problème de cinématique, donc on ne s'occupe pas des changements de la vitesse pour le moment. Pour comprendre ce qui se passe, prenons donc tout d'abord une vitesse \vec{V} constante, donc une voiture qui roule tout droit à vitesse régulière V .
- C'est une équation du premier ordre. Il faut spécifier la condition initiale : l'angle θ_0 .
- Enfin, regardons ce qui se passe aux petits angles, $\theta \ll 1$, $\sin \theta \approx \theta$, et oublions provisoirement les termes non-linéaires (approximation physique, voir page 4 et la discussion après l'équation (23)).

Résolution. Finalement, on obtient :

$$\theta(t) \sim \theta_0 e^{-Vt/L} = \theta_0 e^{-s/L}. \quad (22)$$

Pouvez-vous commenter cette équation ?

- Si $V > 0$, θ tend à revenir vers 0, donc la position $\theta = 0$ est stable ; elle devient instable si $V < 0$.
- En marche avant : si vous partez avec un certain angle, la remorque se rabat exponentiellement sur une longueur caractéristique de $s = L$, ou un temps $\tau = L/V$. Quelle que soit au départ l'orientation de la remorque, il suffit d'avancer d'un mètre environ (donc de rouler pendant un temps τ de l'ordre d'une fraction de seconde) pour que la remorque se mette sagement en place.
- En marche arrière, en revanche, l'angle croît exponentiellement : si la remorque n'est pas strictement dans l'axe de la voiture, il suffit de reculer d'un mètre ou deux pour qu'elle se mette en travers.

► Question 2.4.

Résolution et vérifications. Il se trouve que dans le cas rectiligne uniforme où \vec{V} est constant, l'équation (21) peut s'intégrer analytiquement. Après calculs, on trouve l'une des deux expressions équivalentes :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \tanh \left(\frac{s - s_c}{L} \right) \\ \theta &= 2 \arctan \left[e^{(s_c - s)/L} \right], \end{aligned} \quad (23)$$

où s_c est l'abscisse à laquelle θ atteindrait $\pi/2$.

Vérifications : c'est homogène ; le signe a l'air bon et le comportement aussi, puisqu'aux grands s , $\cos \theta$ augmente (pour se rapprocher de la valeur 1) et θ décroît exponentiellement vers 0 (voir figure 35).

NB : le facteur 2 de l'équation (23) est correct. Il était absent de l'équation (22) parce qu'on avait fait une approximation un peu trop tôt : on avait d'abord linéarisé une expression (donc négligé de petits termes), puis ensuite pris son exponentielle (voir page 5).

► Question 2.5.

Analyse qualitative. Comment faites-vous pour reculer avec une remorque ? Autrement dit, comment choisirez-vous la fonction $\vec{V}(t)$ pour la faire reculer dans le droit chemin ? Supposez que θ soit positif, comme sur la figure 34. Si vous voulez faire reculer la remorque le long de l'axe \hat{e}_X , il ne faut pas reculer la voiture tout droit selon \hat{e}_X : vous n'aboutiriez qu'à mettre la remorque en travers en une fraction de seconde.

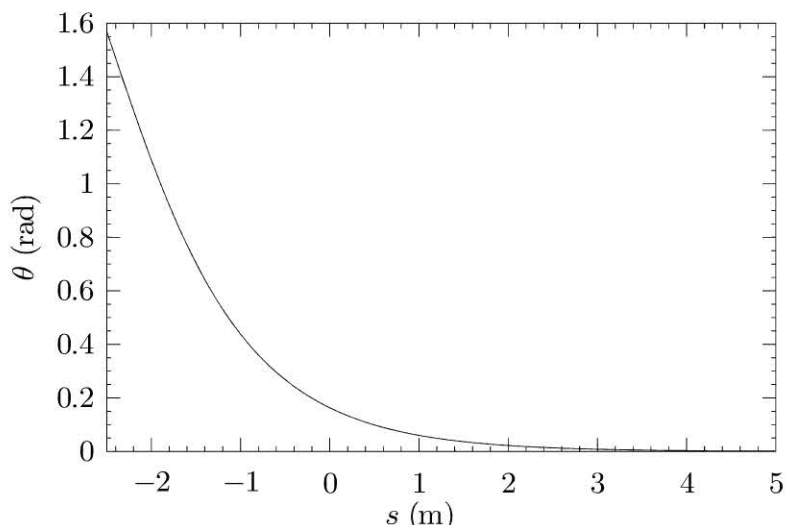


Figure 35 Solution de l'équation (23), prise ici pour $\theta(0) \approx 10^\circ \approx 0,17 \text{ rad}$.

Lorsqu'on avance ($s > 0$), θ décroît exponentiellement. Si l'on recule de $s_c = -2,5 \text{ m}$ on voit θ atteindre $\pi/2$; il suffit donc de reculer de 2 m pour qu'on mette la remorque en travers et qu'elle vienne cogner la voiture.

La solution est au contraire de l'accompagner. Reculez en tournant la voiture, jusqu'à changer le signe de $\sin \theta$. Cela change le signe de $\dot{\theta}$, et remet la remorque dans la direction que vous lui assignez. Il faut aller lentement, pour que le temps d'instabilité $\tau = L/V$ soit plus long que le temps de réaction de votre cerveau (voir page 157).

Notes. Comme on l'a vu page 60, à cause de la largeur de l'essieu, dans un tournant les deux roues ne roulent pas à la même vitesse. L'ordre de grandeur de $\dot{\theta}l$, soit quelques $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, est bien plus petit que la vitesse V de la voiture. La différence de rotation est donc petite. Mais elle est bien réelle, et il y a plusieurs solutions pratiques à cette difficulté :

- Dans une remorque, les deux roues ne sont pas solidaires de l'essieu, elles tournent indépendamment.
- Dans un bogie de train, c'est l'essieu lui-même qui peut tourner par rapport à la caisse.
- Dans le cas de l'essieu moteur d'une voiture, les roues motrices doivent être solidaires de l'essieu : on les munit alors d'un système de rotation différentielle.

Ouvertures.

- Vous pouvez tout d'abord étudier le mouvement du milieu G de la remorque, par rapport au sol (voir la figure 36). Attention, ici la distance L entre celui qui tire et celui qui suit est constante (contrairement à la « courbe du chien » décrite par un chien qui se dirige en permanence vers son maître [2]). La courbe que décrit la remorque est complètement indépendante du temps, donc de la vitesse de la voiture. Elle s'appelle la « tractoire » de la trajectoire de la voiture ; si la voiture va en ligne droite, cette tractoire particulière s'appelle la « tractrice » [2].

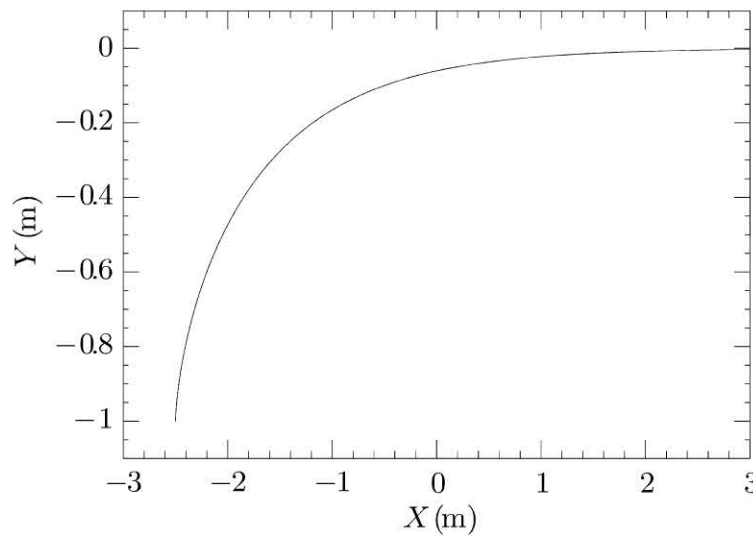


Figure 36

Trajectoire du milieu G de la remorque, tracée numériquement en écrivant $X = s - L \cos \theta$ et $Y = -L \sin \theta$, puis en utilisant l'équation (23) pour éliminer s et θ .

- Est-ce que cela a un rapport avec le mouvement de l'arrière d'une voiture qui tourne ? Est-ce que cela explique pourquoi on se gare en marche arrière plutôt qu'en marche avant ?
- Plus généralement, vous pouvez vous donner une fonction $\vec{V}(t)$ variable, et intégrer l'équation (21). Sauf cas particuliers, il faut le faire numériquement, surtout si l'approximation $\theta \ll 1$ cesse d'être valide.
- Puis vous pouvez vous demander à quel moment on passe du non-glissement au glissement. Pour cela :
 - Vous supposez que vous êtes toujours en non-glissement, et vous calculez alors le frottement solide $|\vec{F}_f|$.
 - Ensuite vous déterminez le mouvement du barycentre de la remorque (qu'on peut supposer situé au point milieu G).
 - Enfin vous déterminez quand $|\vec{F}_f|$ atteint la limite $|\vec{F}_f| = \mu mg$, où μ est le coefficient de frottement statique de la roue sur le sol.

Pour trouver $\ddot{\theta}$ on pourra avoir intérêt à dériver proprement l'équation (19) en utilisant $d\hat{e}_x = \hat{e}_y d\theta$. Est-ce intéressant d'écrire l'énergie de la remorque ? Non, pour plusieurs raisons :

- D'abord parce qu'il n'y a pas d'énergie potentielle évidente dans ce problème. Ce qui ramène θ vers 0 dans la question précédente, ce n'est pas un ressort, mais un effet de la vitesse $\vec{V}(t)$.
- Ensuite, parce qu'il faut se mettre dans le référentiel lié au sol (on cherche la force de frottement sur le sol). Pour cela il faudrait calculer la variation d'énergie cinétique de la remorque. Cela nécessiterait de calculer la force qui travaille, en l'occurrence la force de traction par la voiture. Il n'y a alors plus d'avantage à passer par l'énergie.

- Enfin, parce qu'on cherche justement la valeur d'une force de frottement qui ne travaille pas. Il y a donc peu de chances que l'énergie fournisse des renseignements pertinents.
- La suite serait de vous demander comment évolue la remorque « incontrôlable » : celle qui glisse. Combien y a-t-il d'équations, combien d'inconnues que l'on cherche, combien que l'on ne cherche pas à calculer ? Quel serait l'effet de mettre un ressort qui fournit un couple de rappel vers $\theta = 0$, comme celui des caravanes ?

Sources et références

Le problème de la roue qui se penche sans pivoter intervient par exemple dans la référence [1]. On trouvera des courbes et des explications sur le site [2].

- [1] F. GRANER. *Petits problèmes de physique – première partie*. Springer, Heidelberg, 1998. Exercices 11 et 22.
- [2] R. FERRÉOL, *Courbes 2D*, 2003.
<http://www.mathcurve.com/courbes2d/courbes2d.shtml>.
 Voir en particulier la page :
<http://www.mathcurve.com/courbes2d/tractrice/tractrice.shtml>.

Corrigé 3 Un pan qui glisse (Énoncé à la page 14)

► Question 3.1.

Première approche. Comment aborder cette question ? On peut proposer de traiter d'abord le cas sans frottement, qui est assez intuitif. Ensuite seulement on rajoutera le frottement : d'après l'énoncé on peut imaginer que la physique ne sera pas fondamentalement différente, mais on verra bien.

Avant de poser les équations, peut-on comprendre ce qui se passe ? Ce n'est pas très sorcier. Intuitivement, on sent que :

- La serviette tombe sous son propre poids.
- Elle bouge « en bloc », autrement dit si le bout qui dépasse descend, c'est toute la serviette qui glisse.
- Plus le bout dépasse, plus elle a tendance à glisser.

Notations. Les notations sont simples (voir la figure 37). Le problème est essentiellement à une dimension. On peut noter :

- m la masse de la serviette ;
- l sa longueur totale, donc m/l sa masse par unité de longueur ;
- x la longueur qui dépasse, $s = l - x$ la longueur qui reste sur la table, $v = \dot{x} = -\dot{s}$ la vitesse de glissement ;
- f le coefficient de frottement solide dynamique.

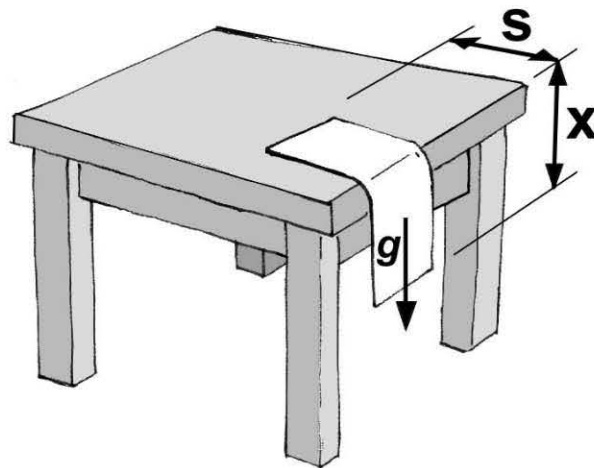


Figure 37 Notations.

Simplifications. Quelles simplifications peut-on faire, sans perdre l'essence du phénomène ? *A priori*, pour que cela reste simple à traiter, il faut que le bout qui dépasse pende bien verticalement, ce qui implique que la vitesse reste suffisamment lente.

On doit choisir les conditions initiales : x_0 , v_0 . Plutôt que de résoudre le cas général, on peut s'intéresser à un cas particulier simple. Si vous voulez prendre $x_0 = 0$, il faut une vitesse initiale v_0 non nulle. Si vous préférez prendre $v_0 = 0$, vous devez prendre x_0 non nul, et même suffisant pour vaincre le frottement solide statique : comme le coefficient de frottement statique ne joue plus aucun rôle une fois que la condition de démarrage est acquise, on n'aura pas à en tenir compte (et donc ça ne coûte pas beaucoup de supposer qu'il est presque égal au coefficient de frottement dynamique).

Mise en équations. On peut suivre la démarche proposée page 7. La première question à se poser est : combien y a-t-il de degrés de liberté ? Il y en a un seul. On aura donc intérêt à écrire la conservation de l'énergie mécanique, en particulier dans le cas sans frottement. Dans le cas avec frottement, on peut choisir d'écrire le principe fondamental de la dynamique : soit au bout qui dépasse, soit au bout qui reste sur la table, soit à l'ensemble de la serviette. Voyons un peu ces différentes possibilités.

Cas sans frottement. Utilisez la conservation de l'énergie. C'est simple et direct. L'énergie cinétique est $mv^2/2$; l'énergie potentielle de pesanteur du bout sur la table peut être prise nulle pour faire simple ; en ce cas le bout qui dépasse a une énergie potentielle de pesanteur qui vaut $-(m/l)x^2/2$: attention à ce facteur $1/2$, qui représente l'altitude du barycentre (et non de l'extrémité) du bout qui dépasse. La conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mg}{2l}x^2 = E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{mg}{2l}x_0^2. \quad (24)$$

Il est amusant de constater que c'est l'équation du pendule pesant instable, dans sa version linéarisée, voir équation (153).

Avez-vous besoin de dériver cette équation (24) ? Si vous vouliez trouver v en fonction de t , il vous faudrait la dériver, voir la vérification page 68. Mais c'est inutile en général, voir page 7. En effet, l'équation (24) contient toute l'information, y compris les conditions initiales. En particulier, elle donne directement v en fonction de x :

$$v(x) = \sqrt{\frac{2E_0}{m} + \frac{gx^2}{l^2}}.$$

Moyennant une intégration simple, cela donne donc aussi le temps de chute $t_c = \int dt = \int dx/v(x)$; par exemple, si $v_0 = 0$:

$$t_c = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln\left(\frac{l}{x_0} + \sqrt{\frac{\ell^2}{x_0^2} - 1}\right) = \sqrt{\frac{l}{g}} \cosh^{-1}\left(\frac{l}{x_0}\right). \quad (25)$$

On reconnaît que $\sqrt{l/g}$ est le seul temps qu'on peut construire dimensionnellement avec une longueur et g , comme pour le pendule pesant.

Cas avec frottement. Si on voulait écrire le bilan d'énergie, il faudrait de toute façon écrire explicitement l'expression des forces de frottement. Donc utilisez le bilan des forces. Peut-on écrire le bilan des forces sur le système complet ? En principe oui, mais on se pose très vite des questions ardues sur ce qui se passe au niveau de l'arête de la table. Et c'est vrai que, pour que le bout qui dépasse puisse pendre verticalement, il doit y avoir un angle net, donc une singularité locale.

Si vous voulez aller vite, je vous propose de regarder séparément les deux bouts, et d'éviter la zone de raccordement : écrivez simplement qu'elle transmet la tension au sein de la serviette. Vous vous ramenez ainsi à un problème scalaire à une dimension, et vous écrivez :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m}{l} gx - \frac{m}{l} fg(l-x). \quad (26)$$

Si vous trouvez que j'ai été un peu vite à écrire l'équation (26), vous pouvez préférer écrire soigneusement le bilan sur chacun des deux bouts. Attention, travaillez avec des systèmes fermés (si vous savez traiter les systèmes ouverts, vous avez le droit, mais ce n'est guère conseillé ici). Considérez donc chacun des deux bouts à l'instant t , et suivez-les jusqu'à l'instant $t + dt$. Appelez T la tension au sein de la serviette. Sur le bout qui dépasse, on a :

$$m \frac{x}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m}{l} gx - T,$$

puis sur le bout qui est sur la table :

$$m \frac{s}{l} \frac{d^2 x}{dt^2} = T - \frac{m}{l} f g s.$$

Il vous suffit d'additionner ces deux équations pour éliminer T et retrouver l'équation globale (26).

Vérification. On voit que, dans le cas sans frottement, on trouve bien toujours la même équation du mouvement :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{m}{l} g x,$$

qu'on ait utilisé soit la conservation de l'énergie (équation (24)), dérivée par rapport au temps, soit le bilan des forces (équation (26)) avec $f = 0$.

► Question 3.2.

Simplifications. Dans l'équation du mouvement (équation (26)), la masse m se simplifie. On peut la réécrire sous une forme plus élégante :

$$\tau^2 \frac{d^2 x}{dt^2} = x - \tau^2 f g, \quad (27)$$

où on fait apparaître naturellement un temps caractéristique τ :

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g(1+f)}}. \quad (28)$$

Dans l'équation (27), on peut même s'affranchir du terme constant $\tau^2 f g$ en changeant de variable :

$$y = x - \tau^2 f g = x - \frac{f}{1+f} l,$$

d'où finalement :

$$\tau^2 \frac{d^2 y}{dt^2} = y. \quad (29)$$

Cette forme est remarquablement universelle, puisqu'on n'y voit plus du tout apparaître explicitement le frottement. En fait, on est retombé sur l'équation du pendule pesant instable (équation (24)).

Valeur numérique. Comment peut-on estimer τ ? En estimant grossièrement le coefficient de frottement. En inclinant la table d'un angle α , on voit que la serviette démarre pour un angle α_c proche de 45° , ce qui traduit un coefficient de frottement (statique) $\tan(\alpha_c)$ de l'ordre de l'unité :

$$f \approx 1.$$

Pour une serviette de 30 cm de longueur, l'équation (28) donne donc :

$$\tau \approx \sqrt{\frac{0,3 \text{ m}}{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times 2}},$$

soit un temps de l'ordre du dixième de seconde, tout à fait compatible avec notre expérience.

Résolution. L'équation (29) se résout simplement :

$$y = y_0 \cosh\left(\frac{t}{\tau}\right) + \frac{v_0}{\tau} \sinh\left(\frac{t}{\tau}\right).$$

La solution $y(t)$ diverge, ce qui n'a rien de choquant, puisque la serviette va de plus en plus vite ; en pratique, la divergence s'arrête dès que toute la serviette a quitté la table, $x = l$. Cette solution est aussi universelle que l'équation (29). Mais si l'on veut, on peut revenir aux variables initiales (x, l) :

$$x = \frac{f}{1+f} l + \left(x_0 - \frac{f}{1+f} l\right) \cosh\left(\frac{t}{\tau}\right) + \frac{v_0}{\tau} \sinh\left(\frac{t}{\tau}\right).$$

► Question 3.3.

Commentaire. Curieusement, dans cette question, les équations paraissent très simples... mais elles sont difficiles à comprendre ! En effet, dans l'équation (28), il est visible que τ diminue quand f augmente. Or, intuitivement, on aurait pensé l'inverse ? On aurait aimé que le frottement diminue la vitesse, donc augmente la durée de la chute, ce qui devrait être visible sur le temps caractéristique ?

Dissocions donc cette question en deux parties. D'abord, est-ce que la durée de la chute augmente avec le frottement f ? Ensuite, est-ce que la durée de la chute augmente avec le temps caractéristique τ ? On va voir que les réponses sont respectivement « oui » et « non », ce qui est physiquement acceptable. Pour cela, il faut calculer le temps de chute t_c . C'est le temps tel que $x = l$; par exemple dans le cas $v_0 = 0$ on trouve :

$$t_c = \tau \cosh^{-1}\left(\frac{l - fg\tau^2}{x_0 - fg\tau^2}\right). \quad (30)$$

Vérification : quand $f = 0$, en utilisant l'équation (28) on retrouve bien l'équation (25).

À partir de là, on a deux voies possibles ; l'article [1] propose la première ; personnellement, je préfère la seconde.

Première méthode, plus élégante. Gardez les variables adimensionnées. En notant $s_0 = l - x_0$ la longueur initialement sur la table, on peut réécrire l'expression de t_c (équation (30)) ; après un peu de calculs, on obtient une forme plus compacte :

$$\frac{t_c}{\tau} = \cosh^{-1} \left(\frac{1}{1 - s_0/g\tau^2} \right).$$

Cette forme est universelle : elle est valable avec ou sans frottement. Ici, le frottement apparaît par l'intermédiaire de τ . Or τ intervient en deux endroits. Dans le membre de gauche, il sert de référence pour le temps t_c ; dans le membre de droite, il sert de référence pour la longueur s_0 . On peut interpréter cela en disant qu'en plus du temps caractéristique τ , il y a une longueur caractéristique $g\tau^2$. Celle-ci aussi diminue quand le frottement augmente. La longueur s_0 que la serviette doit parcourir pour tomber, soit $s_0/g\tau^2$ sous forme adimensionnée, augmente quand τ diminue (figure 38). En conclusion, même si le temps caractéristique τ_c a un peu diminué, la serviette a beaucoup plus de « trajet » à parcourir : elle met un temps supérieur.

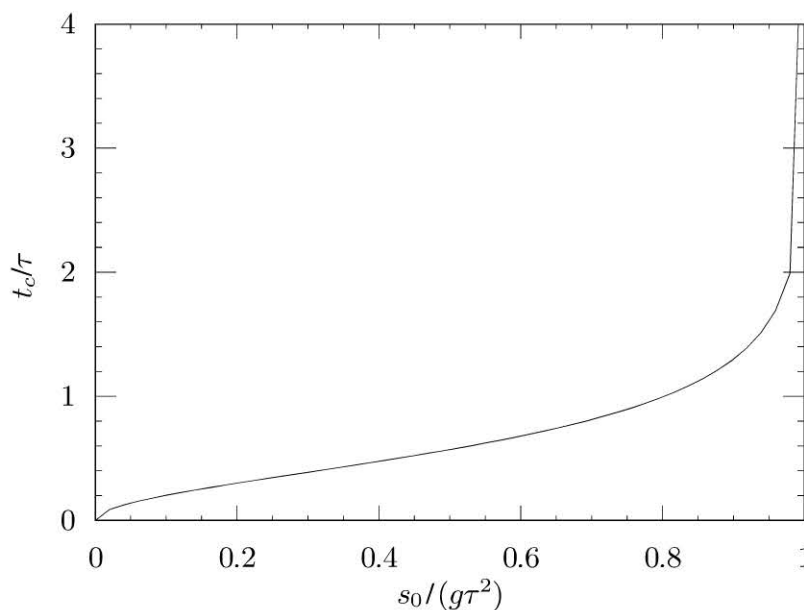


Figure 38 Temps de chute t_c en fonction de la longueur s_0 initialement sur la table. Les unités des axes sont le temps τ et la longueur $g\tau^2$.

Deuxième méthode, plus claire. Revenir aux vraies variables. En rappelant que $l - fg\tau^2 = g\tau^2 = l/(1 + f)$, après quelques calculs simples on réécrit l'équation (30) :

$$t_c = \sqrt{\frac{l}{g(1+f)}} \cosh^{-1} \left[\frac{l}{x_0 - f(l - x_0)} \right].$$

Pour un x_0 donné, si l'on augmente le coefficient de frottement f , le terme entre crochets augmente. Il diverge, et donc t_c diverge aussi (même si la racine diminue un peu), lorsque f atteint la valeur limite :

$$f_{\max} = \frac{x_0}{l - x_0}.$$

Si f dépasse cette valeur, la serviette ne glisse plus du tout. Ces résultats sont conformes à l'intuition. En pratique, le coefficient de frottement vaut $f \approx 1$ à 3 : la serviette démarre à condition que x_0 soit plus grand que $l/2$ ou $3l/4$.

En conclusion, l'intuition était correcte. Ne vous fiez pas à l'apparence des équations ! La page 76 présente une difficulté similaire.

Sources et références

- [1] F. BEHROOZI. The Sliding Chain Problem With and Without Friction: A Universal Solution. *European Journal of Physics*, volume 18, 1997, pages 15-17.

Corrigé 4 Un problème de bille infaisable ? (Énoncé à la page 15)

➤ Question 4.1.

Simplifications. L'énoncé demande d'étudier le régime asymptotique uniquement. Oubliez-donc les détails, dont tout ce qui concerne le régime transitoire, aux temps courts.

- Pour commencer, on ne va considérer que le mouvement dans un plan vertical, comme sur la figure 4 (voir figure 39). En effet, si la vitesse de la bille a une composante latérale (perpendiculaire à l'escalier), elle est à peu près constante et découplée du mouvement principal de la bille ; en outre, assez rapidement, la bille tombe sur le côté de l'escalier, et le problème s'arrête : c'est sans aucun intérêt.
- Ensuite, on peut choisir de considérer une bille qui roule ou qui ne roule pas. Est-ce qu'on souhaite tenir compte de la rotation propre de la bille ? Elle n'est pas

essentielle ici (alors qu'elle est essentielle dans d'autres cas, comme la boule de billard) : on va déjà s'intéresser aux rebonds d'une bille qui ne roule pas.

- Si la taille de la bille est bien plus petite que la longueur des marches, la majorité des rebonds se fera normalement sur la surface d'une marche. On néglige alors les faux rebonds sur les arêtes des marches.
- Un point essentiel : la taille des sauts. Chaque saut de la bille peut être plus petit ou plus grand qu'une marche. À l'extrême, la bille peut faire de nombreux sauts sur une seule marche : ce n'est guère intéressant, puisque c'est équivalent à une bille qui rebondit par terre. À l'autre extrême, en revanche, c'est plus intéressant : entre le n -ième et le $n + 1$ -ième rebond, la bille fait des sauts de plusieurs marches, ce qui suppose que la composante horizontale de la vitesse de la bille est positive.
- Devez-vous tenir compte des pertes d'énergie mécanique par frottements ? Il y a toujours des pertes : lors de chaque rebond, même pour une super-balle rebondissante ; et aussi un peu par frottement dans l'air, entre deux rebonds. Intuitivement, on sent que ce sont ces pertes qui vont déterminer si la bille accélère ou non.

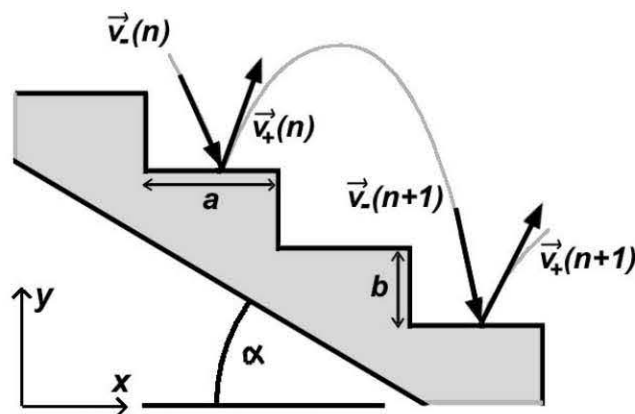


Figure 39 Notations.

► Question 4.2.

Notations et position du problème. Comment reformulez-vous alors la question ? On peut essayer comme suit. On note a et b la longueur et la hauteur des marches (voir figure 39). On lance une bille de diamètre $\ll a$ et de masse m . Elle vient faire son n -ième rebond au point $(x(n), y(n))$, en arrivant avec une vitesse $\vec{v}_-(n)$, et repart avec une vitesse $\vec{v}_+(n)$, avec toujours $\dot{x} > 0$. On passe de $\vec{v}_-(n)$ à $\vec{v}_+(n)$ par les formules du rebond sur surface horizontale, et de $\vec{v}_+(n)$ à $\vec{v}_-(n+1)$ par une parabole balistique.

Comment allez-vous maintenant écrire que l'endroit de l'impact appartient à la surface de l'escalier ? L'équation mathématique qui décrit l'escalier devient particulièrement simple dans le cas où la bille fait des grands sauts, $x(n+1) - x(n) \gg a$:

les différents rebonds sont tous situés sur la même droite qui fait avec l'horizontale un angle

$$\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right), \quad (31)$$

et l'on peut oublier la structure détaillée des marches (voir « **Ouvertures** »).

Ainsi reformulé, le problème est à la fois assez riche pour être intéressant, et assez simple pour être possible à traiter. Au lieu d'avoir à déterminer $x(t)$, $y(t)$ et $\vec{v}(t)$ en continu, on s'est donc ramené à un système discret : on cherche $x(n)$, $y(n)$ et $\vec{v}(n)$. C'est ce qu'on appelle les *itérations d'un système dynamique discret*. Plus simple encore : on se cantonne à la recherche du comportement asymptotique, dans la limite $n \rightarrow \infty$. La question est de savoir si le mouvement s'amplifie ou au contraire s'amortit.

► Question 4.3.

Analyse qualitative. Il faut vous demander : qu'est-ce que vous cherchez, en fonction de quoi ? Cela vous évitera des calculs inutiles. *A priori*, on cherche la position (x, y) et la vitesse \vec{v} à chaque choc. On sent bien que (x, y) va être un peu compliqué à calculer... mais en fait, en avez-vous vraiment besoin ? À elle seule, la vitesse \vec{v} décrit la physique ; et si vous savez la calculer, il sera bien temps d'en déduire (x, y) par une intégration. Donc : essayez d'éliminer (x, y) , et déterminez $\vec{v}(n)$.

Mise en équations. Entre le choc n et le choc $n + 1$, la bille a une accélération constante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(n), \\ \dot{y} &= \dot{y}(n) - gt, \end{aligned} \quad (32)$$

donc elle décrit la parabole balistique :

$$\begin{aligned} x(t) &= x(n) + \dot{x}(n)t, \\ y(t) &= y(n) + \dot{y}(n)t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Comme les chocs sont sur l'escalier, d'équation approximative $x/a + y/b = 0$ (voir équation (31)), on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{x(n)}{a} + \frac{y(n)}{b} = \frac{x(n+1)}{a} + \frac{y(n+1)}{b} \\ &= \frac{x(n+1) - x(n)}{a} + \frac{y(n+1) - y(n)}{b}. \end{aligned} \quad (34)$$

Il vous faut la vitesse $\vec{v}_-(n+1)$ en fonction de $\vec{v}_+(n)$. Pour cela il vous faut la durée τ de cette parabole : d'après les équations (33) et (34) elle doit vérifier :

$$\frac{\dot{x}(n)\tau}{a} + \frac{\dot{y}(n)\tau}{b} - \frac{g\tau^2}{2b} = 0, \quad (35)$$

donc elle vaut :

$$\tau = \frac{2}{g} [\dot{x}(n) \tan \alpha + \dot{y}(n)]. \quad (36)$$

Dans l'équation (32), on peut remplacer $g\tau$ par $2\dot{x}(n) \tan \alpha + 2\dot{y}(n)$, ce qui donne alors la vitesse $\vec{v}_-(n+1)$ juste avant le choc suivant :

$$\vec{v}_-(n+1) = \begin{pmatrix} \dot{x}(n) \\ \dot{y}(n) - g\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}(n) \\ -\dot{y}(n) - 2\dot{x}(n) \tan \alpha \end{pmatrix}$$

qu'on peut réécrire sous la forme d'une matrice :

$$\vec{v}_-(n+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 \tan \alpha & -1 \end{pmatrix} \vec{v}_+(n). \quad (37)$$

Pour finir, il faut relier la vitesse $\vec{v}_+(n+1)$ après le choc à la vitesse $\vec{v}_-(n+1)$ avant le choc. Il y a plusieurs possibilités, selon qu'on tient ou non compte de la rotation de la bille sur elle-même. De toute façon, la relation entre $\vec{v}_-(n+1)$ et $\vec{v}_+(n+1)$ est à peu près linéaire, et la composante \dot{x} est à peu près constante. Je propose l'expression qui débouche sur les calculs les plus simples :

$$\vec{v}_+(n+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix} \vec{v}_-(n+1). \quad (38)$$

Ici e est un coefficient de restitution en vitesse sur y . C'est un nombre positif, et plus petit que 1 :

$$0 \leq e < 1.$$

On a ainsi mis toute la partie géométrique dans l'équation (37) et toutes les pertes d'énergie dans l'équation (38), donc ces deux équations simplifiées reflètent bien la physique, quand on les rassemble :

$$\vec{v}_+(n+1) = \mathcal{M} \vec{v}_+(n),$$

avec :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2e \tan \alpha & e \end{pmatrix}. \quad (39)$$

Vérifications. Vérifiez l'équation (39) :

- Elle est homogène, car la matrice \mathcal{M} est sans dimension.
- Les signes sont corrects : la vitesse verticale augmente si \dot{x} est positif.
- Enfin, le comportement a l'air correct : la vitesse verticale est à peu près constante, les pertes d'énergie la font diminuer et la pente de l'escalier la fait augmenter. La masse de la bille n'intervient pas, ce qui était prévisible. Les dimensions a et b n'ont plus de rôle, seul leur rapport $\tan \alpha$ est important. Plus intéressant : la gravité g , bien que nécessaire pour que la bille tombe dans l'escalier, n'intervient pas non plus, en tout cas pas explicitement dans cette expression.

► Question 4.4.

Résolution. Pouvez-vous maintenant étudier comment \vec{v} évolue ? Vous devez déterminer le comportement asymptotique de n itérations de l'équation (39), c'est-à-dire de \mathcal{M}^n . Or la matrice \mathcal{M} est une matrice triangulaire ; on trouve donc immédiatement :

$$\mathcal{M}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1 + e + e^2 + \dots + e^{n-1})2e \tan \alpha & e^n \end{pmatrix},$$

et donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{M}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2e \tan \alpha}{1 - e} & 0 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Surprise : \mathcal{M}^n ne diverge jamais ! Le mouvement tend donc toujours à être périodique. C'est contraire à l'intuition...

Commentaire. Pouvez-vous expliquer ce qui s'est passé ? Reprenons calmement. On s'attendrait à ce que la vitesse augmente sans cesse sous l'effet de la pente, représentée par α ; tandis que les pertes, représentées par e , tendent à interdire cette divergence.

Imaginons temporairement qu'il n'y ait pas de pertes du tout ($e = 1$), ce qui n'est bien sûr pas réaliste. L'équation (39) donne alors :

$$\mathcal{M}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n \tan \alpha & 1 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Comme on s'y attend, la composante $\dot{y}(n)$ diverge. Elle croît comme $n\dot{x}(0)$, ce qui veut dire que si $\dot{x}(0) \neq 0$, la bille accélère (si $\dot{x}(0) = 0$, elle ne fait que des rebonds verticaux). Mais attention : la divergence est linéaire en n , c'est donc une divergence faible. Elle est extrêmement sensible à la valeur de e : elle est tuée dès que e est un plus petit que 1, même de très peu. C'est donc très différent d'une divergence forte, de type exponentiel, qui pourrait avoir lieu malgré des pertes.

Ce raisonnement reste insatisfaisant, car on imagine qu'il n'y a pas une grande différence entre le cas avec de toutes petites pertes (e proche de 1, soit $1 - e \ll 1$) ou pas de pertes du tout (e égal à 1, soit $1 - e = 0$). Qu'en pensez-vous ? Qui a raison : le raisonnement mathématique, ou l'intuition ?

Pour y répondre, examinez sur l'équation (40) comment varie \mathcal{M}^n pour n petit. Si les pertes sont faibles (e proche de 1, soit $1 - e \ll 1$), alors $(1 + e + e^2 + \dots + e^{n-1})$ vaut à peu près n (voir équation (41)), et e^n vaut à peu près 1. La saturation de \mathcal{M}^n (équation (40)), et donc de \dot{y} , n'intervient que quand $(1 + e + e^2 + \dots + e^{n-1})$ a presque atteint la valeur $(1 - e)^{-1}$. Cette valeur peut être extrêmement élevée, et l'on n'observe ce régime asymptotique qu'à très grande valeur de n . Autrement dit, si les pertes sont de 10 % ($e = 0,9$), la vitesse croît pendant au moins une bonne dizaine de rebonds avant qu'on n'observe une quelconque saturation de \dot{y} ; et en ce cas, puisque $e \tan \alpha$ est de l'ordre de l'unité, \dot{y} est élevé : il atteint environ $20\dot{x}$. Or en pratique, dans un escalier, on observe en général moins que dix rebonds : on voit donc toujours la vitesse augmenter (si $\tan \alpha$ est plus important que les pertes). Pour observer une quelconque saturation de \dot{y} , il faudrait disposer d'un très grand escalier... et être capable de le descendre très vite, pour suivre la bille.

Pour résumer, l'intuition est correcte, et il faut être attentif avec les équations (voir aussi page 71) :

- Quand l'amortissement est fort, par exemple un escalier couvert de moquette, e est très inférieur à 1. En ce cas le régime asymptotique est observable : la vitesse est périodique.
- Quand l'amortissement est faible, par exemple un escalier de marbre, e est à peine inférieur à 1. En ce cas on observe une croissance régulière de la vitesse. Le régime asymptotique existe en principe, mais il est trop lointain pour être observable.

Notes. Pour écrire les équations (37) et (38), on a simplifié en regroupant toutes les pertes dans un seul terme, e , qui décrit la restitution de la vitesse en y . Il n'est pas sûr qu'ainsi on ait préservé l'essentiel de la physique. Par exemple, lorsque les pertes sont grandes, on commence à détecter que la composante horizontale v_x diminue aussi. Ainsi, à l'extrême, si la bille est faite en pâte à modeler, les pertes au cours du choc sont énormes et la bille ne rebondit même pas.

Ouvertures. On peut élargir ce problème en le compliquant à l'infini : par exemple en introduisant la structure détaillée des marches, avec une simulation sur ordina-

teur ; en tenant compte des arêtes des marches, qui introduisent des rebonds au hasard ; en étudiant le rebond d'une bille sur une surface rugueuse ; ou encore en étudiant non pas une bille mais une roue [1], auquel cas on tient compte de sa rotation sur elle-même.

Sources et références

- [1] S. M. EISENSTEIN. Le Cuirassé Potemkine, Film, U.R.S.S., 1925. Scène du grand escalier.

Corrigé 5 La Lune tombe à pic (Énoncé à la page 16)

► Question 5.1.

Notations. On peut proposer de noter (voir en particulier les figures 40 et 42) :

- R_S et R_L les rayons du Soleil et de la Lune ;
- $2R_S$ et $2R_L$ leurs diamètres ;
- R_{TS} et R_{TL} leurs distances au centre T de la Terre ;
- R_{OS} et R_{OL} leurs distances à un observateur situé en un point O à la surface de la Terre ;
- $\alpha_S^{(T)} = R_S/R_{TS}$ et $\alpha_L^{(T)} = R_L/R_{TL}$ leurs rayons angulaires apparents depuis T (angles « géocentriques ») ;
- $\alpha_S = R_S/R_{OS}$ et $\alpha_L = R_L/R_{OL}$ leurs rayons angulaires apparents pour l'observateur situé en O (angles « topocentriques »).

Commençons par convertir les angles en radians (voir page 288).

$$\alpha_S^{(T)} = 15'46,78'' = 946,78'' = 4,596 \cdot 10^{-3} \text{ rad},$$

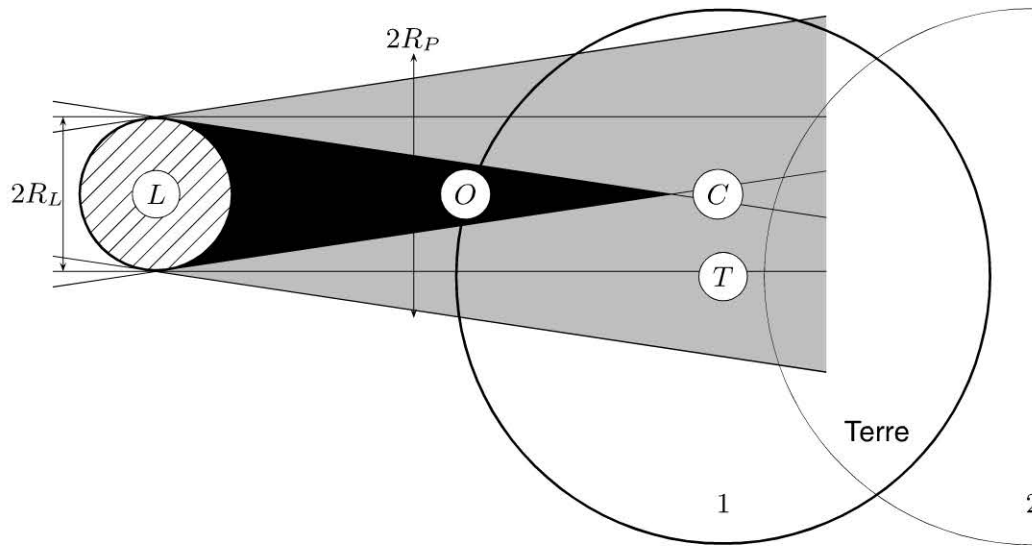
$$\alpha_L^{(T)} = 16'0,36'' = 960,36'' = 4,662 \cdot 10^{-3} \text{ rad}. \quad (42)$$

On en tire les distances Terre-Soleil et Terre-Lune ce jour-là :

$$R_{TS} = \frac{R_S}{\alpha_S^{(T)}} = 1,514 \cdot 10^{11} \text{ m},$$

$$R_{TL} = \frac{R_L}{\alpha_L^{(T)}} = 3,727 \cdot 10^8 \text{ m}. \quad (43)$$

On constate donc que ce jour-là, la distance Terre--Soleil, 151 millions de kilomètres, est presque à son maximum ; au contraire la distance Terre-Lune, 372 milliers de kilomètres, est proche de son minimum. La Lune apparaît donc plus

**Figure 40**

La pénombre, en gris clair, est l'ensemble des points qui voient le Soleil partiellement éclipsé.

La vraie ombre, en noir, est l'ensemble des points qui ne voient plus du tout le Soleil.

La ligne 1 indique la position de la Terre lors de l'éclipse totale du 11 août 1999 ; la position 2 aurait correspondu à une éclipse partielle.

NB : puisqu'en réalité la distance Terre-Lune vaut plus de soixante fois le rayon de la Terre, ce type de figure n'est jamais à l'échelle.

grande qu'en moyenne, et le Soleil plus petit. Un observateur situé en un point O à la surface de la Terre est à distance R_T du centre T de la Terre, et placé entre T et la Lune (voir figure 40), donc :

$$R_S = R_{TS} - R_T \approx R_{TS},$$

$$R_L = R_{TL} - R_T = 3,663 \cdot 10^8 \text{ m.} \quad (44)$$

Finalement les angles vus depuis un observateur sont :

$$\alpha_S = \frac{R_S}{R_{TS} - R_T} = 4,597 \cdot 10^{-3} \text{ rad,}$$

$$\alpha_L = \frac{R_L}{R_{TL} - R_T} = 4,743 \cdot 10^{-3} \text{ rad.} \quad (45)$$

On vérifie que ces angles sont un peu plus grands que les angles pris depuis le centre de la Terre : c'est normal, l'observateur est légèrement plus proche. Comme R_T est bien plus petit que R_S , son effet sur α_S est infime ; en revanche il a un effet notable sur α_L . En conséquence, l'écart angulaire $\alpha_L - \alpha_S$ est deux fois plus grand que $\alpha_L^{(T)} - \alpha_S^{(T)}$. C'est important pour la suite.

Simplifications.

- On cherche à comprendre la physique à quelques pourcents près ; les calculs plus précis nécessiteraient de nombreuses corrections raffinées, voir référence [1]. En particulier, on négligera un certain nombre de cosinus dûs à des facteurs de projection en géométrie sphérique.
- Le paramètre essentiel, c'est celui qui caractérise que la Lune nous apparaît un peu plus grande que le Soleil. Notons-le η :

$$\eta = \frac{\alpha_L - \alpha_S}{\alpha_L + \alpha_S} = \frac{\delta\alpha}{2\alpha} = \frac{4,743 - 4,597}{4,743 + 4,597} = 1,56 \cdot 10^{-2}. \quad (46)$$

Comme $\eta \ll 1$, on se contentera des développements linéaires en η , en négligeant les termes d'ordre η^2 .

► Question 5.2.

Analyse qualitative. Le Soleil éclaire la Terre et la Lune. La Lune nous apparaît sombre quand elle est entre le Soleil et nous : c'est la nouvelle Lune.

À la nouvelle Lune, si la Lune occulte le Soleil, elle nous fait de l'ombre, nous voyons moins bien le Soleil : c'est une éclipse de Soleil. C'est comme quand vous bronzes sur la plage et que quelqu'un passe devant vous, vous cachant le Soleil.

Si la Lune et la Terre avaient leur orbite exactement dans le même plan, on aurait une éclipse de Lune et une de Soleil à chaque rotation de la Lune, donc tous les mois. Comme les deux orbites font un angle léger (de 5°), la Lune ne passe pas toujours devant le Soleil : en réalité, il y a environ une éclipse de Soleil tous les six mois.

Par coïncidence, il se trouve que les diamètres angulaires du Soleil et de la Lune sont voisins (voir page 16). En général, la Lune ne nous cache qu'un morceau du Soleil, cf figure 5. Or la distance Terre-Lune fluctue un peu, et la distance Terre-Soleil aussi ; quand la Terre est près de la Lune et loin du Soleil, la Lune nous apparaît plus grande que le Soleil. En ce cas la Lune peut cacher totalement le Soleil, et l'on parle alors d'éclipse totale. C'est le cas ici, comme on l'a vu.

L'ombre de la Lune sur la Terre est une toute petite tache, bien plus petite que la Terre elle-même. C'est ce qu'on appelle la zone de totalité. Quand il y a une éclipse totale, seuls les gens situés exactement sur l'alignement Lune-Soleil peuvent le voir. Hors de cette zone, on voit le Soleil simplement écorné par la Lune, donc une éclipse partielle (voir « Notes »).

À l'opposé, quand la Lune passe derrière la Terre, c'est nous qui lui faisons de l'ombre : c'est une éclipse de Lune. Or nous sommes alors entre le Soleil et la Lune : nous voyons sa face éclairée. C'est donc un peu surprenant : les éclipses de Lune arrivent justement quand elle est pleine ! Les éclipses de Lune sont aussi fréquentes que celles de Soleil, mais l'ombre portée par la Terre est nettement plus grande que la Lune, donc les éclipses de Lune sont fréquemment totales.

► Question 5.3.

Notations. On note t les dates des différents instants importants, respectivement appelés les quatre contacts (voir la figure 41) :

- t_1 le moment où l'on voit la Lune commencer juste à écorner le Soleil ;
- t_2 le moment où elle commence à le cacher complètement ;
- t_3 le moment où elle achève de le cacher complètement ;
- t_4 le moment où elle achève de l'écorner.

Donc $t_4 - t_1$ est la durée complète d'observation de l'éclipse partielle, tandis que $t_3 - t_2$ est la brève durée pendant laquelle on observe l'éventuelle éclipse totale.

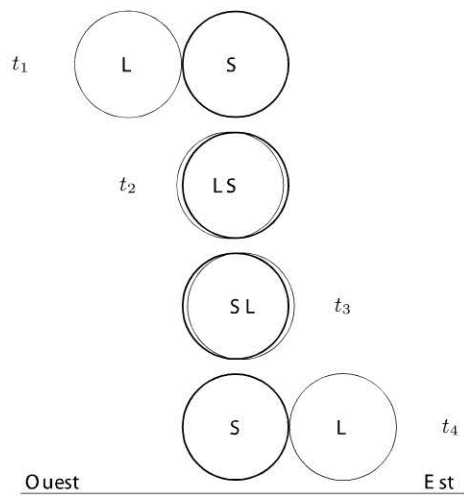


Figure 41 Définition des quatre contacts.

Les quatre contacts désignent les quatre moments où la Lune et le Soleil sont tangents. L'éclipse dure de t_1 à t_4 , mais elle n'est totale qu'entre t_2 et t_3 .

Mise en équations et résolution.

- Le diamètre $2R_P$ de la pénombre est donné par la taille de la Lune, à laquelle s'ajoute l'effet de l'angle apparent du Soleil, α_S (voir la figure 40) :

$$2R_P = 2R_L + 2\alpha_S R_{OL} = 2(\alpha_L + \alpha_S) R_{OL}, \quad (47)$$

soit $2R_P \approx 4\alpha R_{OL} = 4R_L$.

- La vitesse d'avancée de l'éclipse vue par nous est égale à la vitesse d'avancée de l'ombre de la Lune, moins la vitesse de rotation de la Terre. Il faut bien les soustraire et non les additionner, car toutes les deux sont dans le même sens : d'Ouest en Est. Cela donne :

$$v = v_{\text{ombre}} - v_{\text{rot}} = \frac{2\pi}{T_L} R_{OL} - \frac{2\pi}{T_T} R_T \cos(\varphi_{\text{lat}}), \quad (48)$$

où :

- T_L est la période de rotation de la Lune sur son orbite : environ 27 jours (voir page 16).
 - T_T est la rotation de la Terre sur elle-même : 1 jour sidéral, soit 23 h 56 mn 4 s.
 - $\cos(\varphi_{\text{lat}})$ le cosinus de la latitude de l'endroit, puisque $2\pi R_T / T_T$ est la vitesse de rotation à l'Équateur.
- La durée $t_4 - t_1$ de l'éclipse partielle est donnée en regroupant les équations (47) et (48) :

$$t_4 - t_1 = \frac{2R_P}{v} = 2(\alpha_L + \alpha_S) \left[\frac{2\pi}{T_L} - \frac{2\pi}{T_T} \frac{R_T}{R_{OL}} \cos(\varphi_{\text{lat}}) \right]^{-1}. \quad (49)$$

Vérifications.

- Homogénéité : le membre de droite de l'équation (49) est bien un temps.
- Signe : le signe – a été discuté en écrivant l'équation (48).
- Comportement : la durée de l'éclipse est déterminée par la vitesse à laquelle la Lune passe devant le Soleil, elle augmente donc avec T_L .

Valeurs numériques. La taille de la pénombre est liée à la somme $\alpha_L + \alpha_S$ (équation (47)), sa vitesse est liée à la rotation de la Terre et de la Lune (équation (49)). Ces valeurs sont donc les mêmes pour chaque éclipse, partielle ou totale.

On trouve :

- $2R_P \approx 7 \cdot 10^6$ m : la tache de la pénombre a pour diamètre le rayon terrestre, autrement dit elle couvre en gros du pôle à l'Équateur (voir la figure 40).
- La vitesse de rotation de la Terre sur elle-même, à la latitude de 50° , est de $3 \cdot 10^2$ m · s⁻¹. Cela nous paraît rapide, près de 1 100 km · h⁻¹.
- La vitesse de l'ombre est encore plus rapide : 10^3 m · s⁻¹, soit 3 600 km · h⁻¹.
- On voit donc l'ombre de la Lune avancer à $7 \cdot 10^2$ m · s⁻¹, soit 2 500 km · h⁻¹.
- La durée complète de l'éclipse partielle est donc de l'ordre de $t_4 - t_1 = 10^4$ s, soit 2 h 45 mn environ. On explique donc bien, par ce modèle simplifié, la valeur observée en France en 1999, qui a été entre 2 h 39 mn et 2 h 42 mn.

➤ Question 5.4.

Notations et mise en équation. Ce qu'on voit, c'est la partie du Soleil qui n'est pas occultée par la Lune. La Lune elle-même est obscure : on ne la voit pas.

La partie visible du Soleil est un cercle dont il manque une portion (voir figure 42). Cette portion ne dépend que de la distance apparente LS (c'est-à-dire en fait un angle apparent) entre les centres du Soleil et de la Lune. On peut donc la repérer par un seul paramètre ; par exemple, par l'angle θ_S , compris entre 0 et $\pi/2$, défini en appelant $2\theta_S$ l'angle sous lequel cette portion est prise depuis le point S .

Cette portion manquante apparaît comme l'intersection de deux cercles (figure 42). Elle est donc délimitée par deux arcs de cercle qui ont la même corde :

$$\alpha_S \sin(\theta_S) = \alpha_L \sin(\theta_L). \quad (50)$$

Ce que nous cherchons, c'est la surface δ_S entre l'arc de cercle du Soleil et la corde. Elle s'obtient avec un peu de géométrie, en prenant la portion de cercle (proportionnelle à θ_S) moins le triangle délimité par la corde (proportionnel à $\sin \theta_S \cos \theta_S$) :

$$\delta_S = 2 \frac{\alpha_S^2}{2} \theta_S - 2 \frac{\alpha_S \cos(\theta_S) \alpha_S \sin \theta_S}{2} = \frac{\alpha_S^2}{2} (2\theta_S - \sin(2\theta_S)). \quad (51)$$

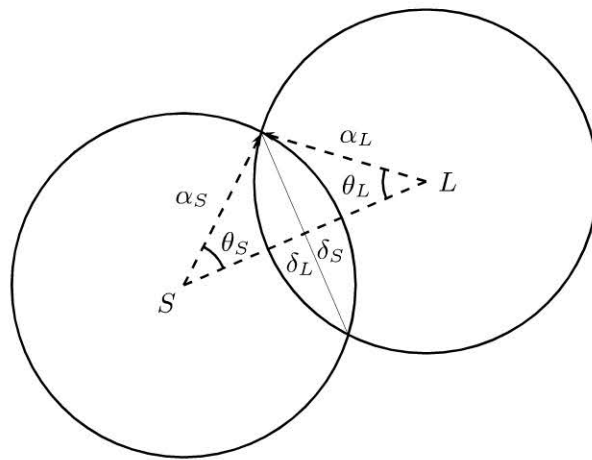


Figure 42 Notations géométriques.

S est le centre du Soleil, θ_S l'angle entre LS et l'extrémité de la corde, δ_S la portion de surface entre l'arc du cercle du Soleil et sa corde (observez attentivement de quelle surface il s'agit). Notations pour la Lune : les mêmes, avec l'indice L . Attention, la Lune et le Soleil ne sont pas du tout dans le même plan ; sur cette figure, on ne se rend pas compte des distances réelles, on ne voit que des angles apparents. On a donc représenté les rayons angulaires apparents α_S et α_L du Soleil et de la Lune (et non leurs rayons réels R_S et R_L).

Résolution : cas $\eta = 0$. Imaginons tout d'abord que la Lune et le Soleil aient le même rayon angulaire α . On serait alors dans le cas limite entre les positions 1 et 2 de la figure 40 (voir discussion page 85).

On aurait simplement :

$$\cos(\theta_S) = \cos(\theta_L) = \frac{LS}{2\alpha},$$

et :

$$\delta_S = \delta_L = (2\theta - \sin(2\theta)) \frac{\alpha^2}{2}.$$

Le degré d'obscurité D , c'est-à-dire le rapport entre la surface visible du Soleil et sa surface totale (figure 43) serait :

$$D = \frac{S - 2\delta}{S} = 1 - \frac{2\delta}{\pi\alpha^2} = 1 - \frac{2\theta - \sin(2\theta)}{\pi}.$$

Cette expression ne s'annulerait que quand θ vaut exactement $\pi/2$. Autrement dit, la durée de l'éclipse totale serait exactement nulle ! En effet, on n'a pas tenu compte de la différence des rayons angulaires du Soleil et de la Lune.

Résolution : cas $\eta > 0$. Si l'on veut trouver la durée de l'obscurité, il faut donc raffiner un peu, et tenir compte de cette légère différence $\eta > 0$ entre les angles apparents :

$$\begin{aligned}\alpha_S &= \alpha(1 - \eta), \\ \alpha_L &= \alpha(1 + \eta).\end{aligned}\tag{52}$$

On a donc une légère différence entre θ_L et θ_S :

$$\begin{aligned}\theta_S &= \theta + \varepsilon, \\ \theta_L &= \theta - \varepsilon,\end{aligned}\tag{53}$$

où ε est donné par l'équation (50) :

$$\alpha_S(\sin \theta + \varepsilon \cos \theta) = \alpha_L(\sin \theta - \varepsilon \cos \theta).$$

On peut donc écrire en général (sauf lorsque $\theta \rightarrow \pi/2$) :

$$\varepsilon \approx \eta \tan \theta + O(\eta^2).\tag{54}$$

La relation entre θ et LS reste quasi-inchangée par rapport au cas $\eta = 0$:

$$\begin{aligned}LS &= \alpha_S \cos(\theta_S) + \alpha_L \cos(\theta_L) \\ &= \alpha(1 - \eta) \cos(\theta + \varepsilon) + \alpha(1 + \eta) \cos(\theta - \varepsilon) \\ &= 2\alpha \cos \theta + O(\eta^2).\end{aligned}\tag{55}$$

En revanche, on modifie un peu l'expression du degré d'obscuration D . Les calculs sont faciles mais lourds, et donnent pour $\eta > 0$:

$$\begin{aligned}D &= \frac{\pi \alpha_S^2 - \delta_S - \delta_L}{\pi \alpha_S^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi} (2\theta_S - \sin(2\theta_S)) - \frac{1}{2\pi} \frac{\alpha_L^2}{\alpha_S^2} (2\theta_L - \sin(2\theta_L)) \\ &= 1 - (1 + 4\eta) \frac{2\theta - \sin 2\theta}{\pi} + O(\eta^2).\end{aligned}\tag{56}$$

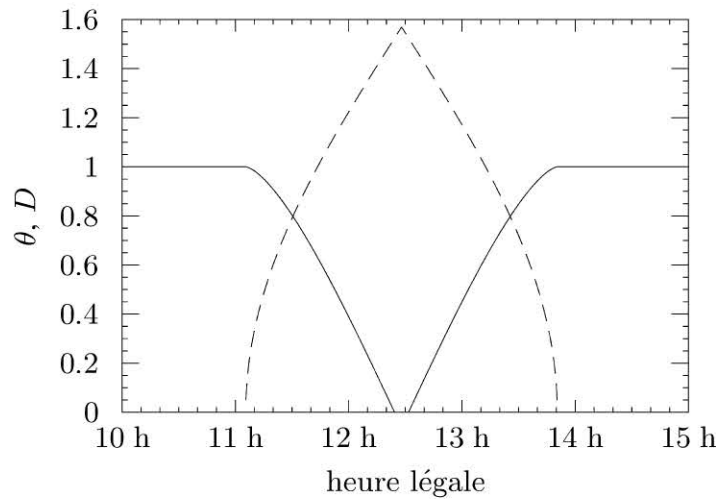


Figure 43 Tracé du paramètre θ (pointillés) d'après l'équation (57), puis du degré d'obscurité D (trait plein) qu'on en déduit par l'équation (56).

On a pris les valeurs correspondant à Metz : latitude $\varphi_{\text{lat}} = 50^\circ$, maximum de l'éclipse à $t_m = 12 \text{ h } 28 \text{ min}$ légale (10 h 28 min au Soleil) le 11 août 1999.

Cela donne quasiment la même chose que quand $\eta = 0$, mais cette fois l'obscurité se fait pendant un temps fini (voir la figure 43).

Graphique. En première approximation, l'intensité lumineuse est proportionnelle à la surface visible (ce point n'est pas trivial : voir « Notes »). Pour pouvoir tracer la figure 43, il faut connaître le degré d'obscurité D en fonction du temps t , et non plus de θ . On peut utiliser le fait que la Lune se déplace devant le Soleil à vitesse angulaire uniforme :

- Au premier et au dernier contact, LS a sa valeur maximum :

$$LS(t_1) = LS(t_4) = \alpha_S + \alpha_L.$$

- Si l'on est exactement sur la ligne de centralité, les centres du Soleil et de la Lune apparaissent superposés ($LS = 0$) ; c'est alors le maximum de l'éclipse, au temps t_m au milieu entre t_1 et t_4 :

$$LS(t_m) = LS\left(\frac{t_1 + t_4}{2}\right) = 0.$$

NB : si l'on n'est pas sur la ligne de centralité, c'est à peine plus difficile à écrire (voir « Ouvertures »).

- Finalement on peut écrire :

$$\frac{LS(t)}{\alpha_S + \alpha_L} = \frac{|t - t_m|}{t_m - t_1}.$$

Avec l'équation (55), on introduit θ :

$$\cos(\theta(t)) = \frac{|t - t_m|}{t_m - t_1} = 2 \frac{|t - t_m|}{t_4 - t_1}, \quad (57)$$

où $t_4 - t_1$ est donné par l'équation (49). On en déduit donc la figure 43.

► Question 5.5.

Durée de la totalité. Pour calculer la durée $t_3 - t_2$ de la phase obscure, attention ! L'approximation linéaire que nous avons utilisée (équation (54)) cesse d'être valide pour $\theta \rightarrow \pi/2$. On ne peut donc pas utiliser l'équation (56).

Mieux vaut revenir à la figure 40. Entre t_2 et t_3 , le déplacement apparent de la Lune est de $2(\alpha_L - \alpha_S)$. On peut le comparer avec le déplacement apparent entre t_1 et t_4 , qui vaut $2(\alpha_L + \alpha_S)$. D'où le rapport entre les durées de l'éclipse totale et de l'éclipse partielle :

$$\frac{t_3 - t_2}{t_4 - t_1} = \frac{2(\alpha_L - \alpha_S)}{2(\alpha_L + \alpha_S)} = \frac{\delta\alpha}{2\alpha} = \eta. \quad (58)$$

On en déduit alors la durée de l'éclipse totale :

$$\eta(t_4 - t_1) \approx 1,56 \cdot 10^{-2} \times 10^4 \text{ s} = 2 \text{ min } 40 \text{ s}.$$

Cela décrit assez bien ce qui s'est passé. En effet, les heureux élus qui étaient le 11 août 1999 sur la ligne de centralité, à un endroit sans nuage, ont observé l'éclipse totale pendant 2 min 10 s à 2 min 19 s.

Bande de totalité. La bande de totalité, c'est l'ensemble des points qui passent à un moment dans l'ombre de la Lune. La largeur de cette bande de totalité est donc le diamètre de l'ombre. Pour le calculer, il faut trouver la position du point C qui est l'extrémité du cône d'ombre de la Lune. Un observateur privilégié situé au point O à la surface de la Terre voit une éclipse totale si O est en avant du point C : c'est le cas 1 de la figure 40. Tous les autres observateurs voient une éclipse partielle. Si le point O était situé plus loin (cas 2), tout le monde verrait une éclipse partielle.

La position du point C est définie par :

$$\begin{aligned} \frac{R_S}{R_{CS}} &= \frac{R_L}{R_{CL}}, \\ R_{CS} - R_{CL} &= R_{LS} = R_{OS} - R_{OL} = \frac{R_S}{\alpha_S} - \frac{R_L}{\alpha_L}. \end{aligned} \quad (59)$$

Ce qu'on cherche, c'est le rayon R_O de l'ombre :

$$R_O = \alpha R_{CO} = \alpha(R_{CS} - R_{OS}). \quad (60)$$

Il suffit donc d'éliminer R_{CL} dans l'équation (59) pour obtenir R_{CS} :

$$R_{CS} = (R_{OS} - R_{OL}) \left(1 - \frac{R_L}{R_S}\right)^{-1} \approx (R_{OS} - R_{OL}) \left(1 + \frac{R_L}{R_S}\right),$$

qu'on remplace dans l'équation (60) :

$$\begin{aligned} R_O &= \frac{1}{\alpha} \left[(R_{OS} - R_{OL}) \left(1 + \frac{R_L}{R_S}\right) - R_{OS} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(R_{OS} \frac{R_L}{R_S} - R_{OL} \right) \\ &= \frac{R_L}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha_S} - \frac{1}{\alpha_L} \right) \\ &= 2\eta R_L. \end{aligned} \tag{61}$$

L'équation (61) donne 54 km de rayon, soit $2R_O = 108$ km de diamètre : la bande fait 108 km de large. À titre de vérification, on voit qu'en avançant à $700 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, l'ombre de la Lune nous passe dessus en $108 \cdot 10^3 \text{ m} / 700 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 155 \text{ s}$, soit 2 min 35 s, ce qui est conforme à la durée trouvée ci-dessus. En effet, le 11 août 1999, la tache avait un rayon d'environ 55 km. Nos approximations sont donc raisonnables !

Commentaires. On a vu page 81 que les propriétés de toutes les éclipses partielles (durée, taille de la pénombre) sont à peu près les mêmes. En revanche, on constate ici que les propriétés des éclipses totales (durée, taille de l'ombre) sont proportionnelles à $\alpha_L - \alpha_S$: elles n'existent donc que quand $\alpha_L - \alpha_S > 0$, et sont extrêmement variables.

En résumé, les éclipses de Soleil sont fréquentes : deux fois par an en moyenne. La majorité sont des éclipses partielles, visibles d'une grande partie de la Terre. Même si les éclipses totales sont une minorité, elles restent fréquentes : environ une tous les deux ans.

En revanche, même quand une éclipse totale a lieu, elle apparaît partielle à la majorité des observateurs et pendant presque toute sa durée. Elle n'est visible comme totale que d'une infime partie du globe. En un lieu donné, on ne voit une éclipse totale que très rarement, et en plus pendant un temps très court. D'où son caractère exceptionnel [2] !

Notes.

- Le Soleil nous apparaît uniformément lumineux : la loi de Stefan étant isotrope, chaque partie de sa surface nous éclaire autant, quelle que soit son orientation

(il y a deux facteur cosinus de projection qui se compensent). Le flux reçu est donc simplement le flux habituel du Soleil (voir page 288) multiplié par le degré d'obscurité D .

- Si l'on commence à raffiner, ce n'est pas strictement exact. Les rayons lumineux qui nous viennent du bord du Soleil doivent traverser une très grande épaisseur d'atmosphère solaire, où ils sont en partie absorbés. Par conséquent, nous observons une légère différence entre la luminosité apparente du centre et des bords du disque solaire. On appelle cela l'effet « centre-bord ».
- De toute façon, l'intensité lumineuse varie à peu près linéairement avec le temps (voir la figure 43). Comme notre œil est un détecteur logarithmique, il est peu sensible à de telles variations linéaires : quand l'éclipse est à mi-parcours, nous ne voyons pas de différence avec un ciel légèrement couvert. En fait, nous ne percevons bien l'éclipse que quand elle est totale.
- Les rayons des astres, et les distances qui nous en séparent (page 16), sont des quantités du domaine de l'astronomie (et non de la vie quotidienne proprement dite). En général, on les trouve toujours combinés sous forme de rapport, c'est-à-dire de diamètre angulaire (voir équation (140)). C'est pour cela que l'astronomie a toujours buté sur les mesures absolues de distance.

Cet exercice est le seul où elles apparaissent indépendamment : par exemple dans l'expression de la largeur de la zone d'ombre (équation (61)). C'est parce qu'ici, il y a deux astres qui interviennent ensemble. C'est ainsi que la conjonction de deux astres permet de mesurer des distances de façon absolue : le passage de Vénus devant le Soleil a permis une bonne détermination de la taille de l'orbite terrestre [3].

- Le 11 août 1999, la zone de totalité concernait toute une bande traversant l'Atlantique Nord, l'Europe du Nord et de l'Est, le Proche-Orient et l'Asie du Sud. Le 21 juin 2001, c'était le tour du Sud de l'Afrique ; le 29 mars 2006, l'Afrique de l'Ouest et du Nord, du Proche-Orient et de l'Asie Centrale. Suivent le 22 juillet 2009 en Asie du Sud-Est, le 9 mars 2016 en Indonésie, le 21 août 2017 en Amérique du Nord, le 2 juillet 2019 en Amérique du Sud, pour ne citer que les plus visibles.

Ouvertures.

- Écrivez l'expression du degré d'obscurité D pour un observateur qui n'est pas sur la ligne de centralité. Comme LS passe par un minimum LS_m non nul, il faut utiliser l'expression :

$$\frac{LS(t)^2 - LS_m^2}{(\alpha_S + \alpha_L)^2} = \left(\frac{t - t_m}{t_m - t_1} \right)^2.$$

Tracez l'allure de la courbe correspondante.

Sources et références

Au milieu de la floraison de livres et de sites internet liés à l'éclipse de 1999, on peut conseiller les publications du Bureau des Longitudes [1, 4], d'où proviennent toutes les valeurs numériques citées ici. Attention, les astronomes utilisent plutôt les angles géocentriques, mais les ouvrages de vulgarisation utilisent plutôt les angles topocentriques (page 77). Or ce n'est pas toujours précisé clairement : cela peut induire en erreur, j'en ai fait l'expérience !

- [1] INSTITUT DE MÉCANIQUE CÉLESTE. *Les Éclipses de Soleil – L'Éclipse totale du 11 août 1999*. EDP Sciences, Les Ulis, 1999.
- [2] HERGÉ. *Les aventures de Tintin – Le temple du Soleil*. Casterman, Tournai, 1976.
- [3] J.-P. LUMINET. *Le rendez-vous de Vénus*. Lattès, Paris, 1999.
- [4] BUREAU DES LONGITUDES. 2002. <<http://www.bdl.fr>>.

Corrigé 6 Un halo s'observe avec précaution (Énoncé à la page 17)

➤ Question 6.1.

Première approche. Première remarque : le rayon angulaire du halo est toujours le même. Est-ce compatible avec de la diffraction ou de la réfraction ?

- En diffraction, la déviation angulaire dépend de la taille de l'objet diffractant. Or, ici, on n'a aucune raison de croire que les cristaux de glace ont toujours la même taille. On peut donc pour l'instant écarter l'hypothèse de la diffraction.
- En réfraction, l'angle de déviation dépend des orientations des surfaces que les rayons rencontrent. Or, même si la glace existe sous plusieurs formes, en règle générale son réseau cristallin a une symétrie d'ordre 6, qui se reflète toujours plus ou moins sur la forme des cristaux, malgré leur diversité : on le constate par exemple sur les flocons de neige. On peut donc examiner si la symétrie d'ordre 6 peut expliquer un phénomène de réfraction.

Analyse qualitative. Le halo n'est pas (malgré l'apparence) situé physiquement autour du Soleil: il se forme certainement autour de la Terre, dans l'atmosphère. Le seul rôle du Soleil là-dedans, c'est d'être une source de lumière à peu près parallèle. Notre œil voit surtout de la lumière qui vient du Soleil directement, et aussi un petit peu de lumière du Soleil qui n'allait pas vers nous, mais qui rencontre sur son chemin un cristal qui le renvoie vers notre œil. Ce qu'il vous reste à comprendre, c'est donc essentiellement : pourquoi un cristal qui a une symétrie d'ordre 6 dévie la lumière de 22° , préférentiellement à tout autre angle ?

A priori, les rayons incidents sont tous parallèles, mais les cristaux ont une orientation quelconque. L'angle d'incidence des rayons sur la surface est donc arbitraire, et l'ensemble des cristaux les dévie dans différentes directions. Que se passe-t-il si

l'angle de déviation passe par un extremum (et donc varie très peu), en fonction de l'angle d'incidence ? En ce cas, la majorité des rayons incidents se retrouvent déviés de la même façon, et leurs contributions s'accumulent toutes dans la même région : cela donne lieu à un halo.

► Question 6.2.

Simplifications. On peut en proposer plusieurs, plus ou moins justifiées.

- On reste en optique géométrique. Si cela permet d'expliquer le halo, tant mieux. Sinon, il sera toujours temps de s'occuper du rôle d'éventuelles interférences ou de la polarisation.
- On considère le Soleil comme une source de lumière exactement parallèle. Si cela permet d'expliquer le halo, tant mieux. Si l'on arrive à une absurdité, il sera toujours temps de s'occuper de son rayon angulaire apparent (voir page 200).
- On ne tiendra pas compte de la forme exacte du cristal, mais uniquement de l'angle entre ses faces d'entrées et de sortie. En effet, c'est le seul paramètre important pour la réfraction. Donc on peut se contenter de dessiner le cristal sous forme d'un hexagone (voir la figure 44). Plus précisément, puisque les faces qui donnent lieu à une déviation font un angle de 60° , on peut même se limiter à un prisme d'angle au sommet de 60° .
- On se ramènera à un problème à 2 dimensions, dans le plan. Cela n'a rien d'évident. En effet, le problème est réellement tridimensionnel (contrairement à l'exercice 19, qui est vraiment bidimensionnel car invariant par translation dans la troisième direction, voir page 194). On fait cette simplification ici parce qu'on va chercher un extremum de déviation, et qu'on peut montrer (voir référence [1]) que cet extremum arrive justement quand le rayon lumineux arrive dans un plan perpendiculaire à l'axe de symétrie du cristal. Je ne le démontrerai pas ici, donc il vous faudra l'admettre.

Notations. On peut proposer les notations de la figure 44. On note α l'angle au sommet du prisme. Les angles i_1, i_2 correspondants à la face d'entrée sont orientés dans le sens horaire, les angles de sortie i_3, i_4 sont orientés dans le sens trigonométrique, pour qu'ils soient tous positifs. Ce qui nous intéresse est l'angle de déviation, noté ψ .

Mise en équations. Le rayon est dévié de $|i_2 - i_1| = i_1 - i_2$ à l'entrée, où i_1 et i_2 sont reliés par la loi de la réfraction (voir « Notes ») :

$$\sin i_1 = n \sin i_2. \quad (62)$$

Le rayon arrive ensuite avec un angle d'incidence i_3 , relié à i_2 par la somme des angles du triangle : $(90^\circ - i_2) + (90^\circ - i_3) + \alpha = 180^\circ$, soit :

$$i_2 + i_3 = \alpha = 60^\circ. \quad (63)$$

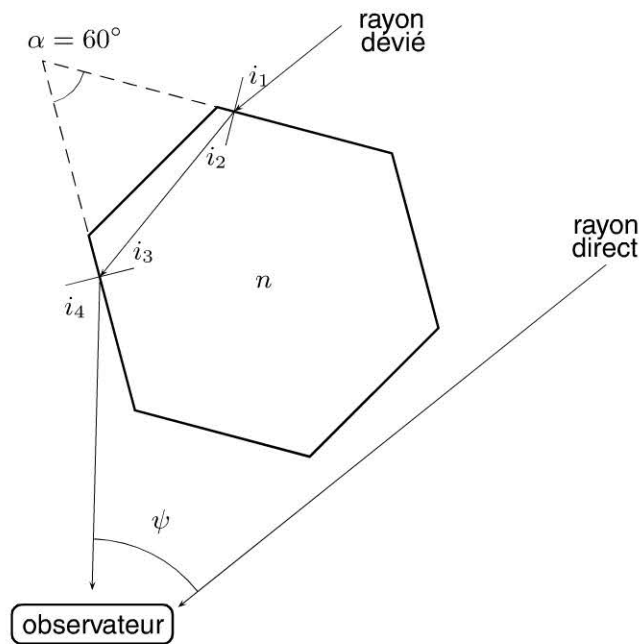


Figure 44 Notre œil reçoit des rayons venant directement du Soleil ; et d'autres, déviés par les cristaux de glace, qui nous semblent venir d'une direction ψ .

Il est ensuite dévié à la sortie d'un angle $i_4 - i_3$, où :

$$\sin i_4 = n \sin i_3, \quad (64)$$

et la déviation totale est :

$$\psi = (i_1 + i_4) - (i_2 + i_3). \quad (65)$$

Quand i_1 prend toutes les valeurs possibles, on cherche si $\psi(i_1)$ passe par un extremum.

Résolution. Pour l'instant, évitez de tout calculer : cela sera fait à la question (6.4). Cherchez plutôt la symétrie du problème. Le système d'équations (62-65) est visiblement symétrique quand on échange i_1 et i_4 , i_2 et i_3 . Cette symétrie du problème impose qu'il existe au moins un extremum lorsque $i_1 = i_4$, $i_2 = i_3$. Les équations (62-65) se réécrivent alors :

$$\sin i_1 = n \sin i_2, \quad (66)$$

$$i_2 = \frac{\alpha}{2} = 30^\circ, \quad (67)$$

$$\psi = 2(i_1 - i_2). \quad (68)$$

On obtient ainsi le minimum de déviation, appelé « angle de déviation du prisme » :

$$\psi = 2 \arcsin \left(n \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) - \alpha, \quad (69)$$

qui vaut ici :

$$\psi = 2 \arcsin \left(\frac{n}{2} \right) - 60^\circ. \quad (70)$$

Vérifications et valeurs numériques. Cette équation est visiblement homogène, les signes ont l'air raisonnables, on ne voit pas d'absurdité apparente. Pour la vérifier vraiment, passez à la détermination de n . Sachant que $n - 1$ varie à peu près comme la densité du matériau, et que la glace est quelques pourcents moins dense que l'eau, on attend une valeur juste inférieure à celle de l'eau (1,33, voir page 286). Or, de l'observation que $\psi = 22^\circ$, on tire justement :

$$n = 1,31.$$

C'est une valeur tout à fait raisonnable, ce qui valide l'équation (70).

► Question 6.3.

Commentaire. L'intérieur du halo, ce sont des rayons qui paraissent venir d'une région plus proche du Soleil : ce sont les rayons les moins déviés. Autrement dit, le rouge est moins dévié que le bleu. Comme d'après l'équation (70), ψ est une fonction croissante de n , cela signifie que $n_{\text{rouge}} < n_{\text{bleu}}$.

C'est conforme à la règle générale pour la plupart des matériaux dans le visible : n est plus petit quand la longueur d'onde λ est plus grande (en première approximation, n est de la forme $a + b/\lambda^2$). Ainsi, pour la glace les valeurs mesurées sont $n = 1,307$ pour le rouge et $n = 1,317$ pour le violet ; si l'on veut un indice moyen pour la lumière blanche on peut prendre la valeur intermédiaire $n = 1,31$.

► Question 6.4.

Simplifications. Si l'on considère non plus le minimum de déviation, mais tous les angles d'incidence, il faudrait en toute rigueur revenir en trois dimensions. On va quand même rester en deux dimensions : la seule justification est que c'est plus simple, et que cela nous permettra de comprendre l'essentiel de ce qui se passe.

Mise en équations. Le travail est alors déjà fait : on reprend le système d'équations (62-65) complet. Cette fois, il faut tout calculer.

Résolution. On déroule la manivelle des calculs, en essayant de ne pas faire d'erreurs :

$$i_2 = \arcsin \left(\frac{\sin i_1}{n} \right),$$

$$i_3 = \alpha - i_2 = \alpha - \arcsin \left(\frac{\sin i_1}{n} \right),$$

$$\begin{aligned}
 i_4 &= \arcsin(n \sin i_3) \\
 &= \arcsin\left(n \sin\left(\alpha - \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right)\right)\right). \quad (71)
 \end{aligned}$$

On tire alors :

$$\begin{aligned}
 \psi &= i_1 + i_4 - \alpha \\
 &= i_1 + \arcsin\left(n \sin\left(\alpha - \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right)\right)\right) - \alpha. \quad (72)
 \end{aligned}$$

Cette fonction n'est pas très agréable à étudier analytiquement, mais numériquement elle est facile à tracer (voir la figure 45). Compte tenu des symétries, il suffit de se limiter au domaine $0 \leq i_1 \leq 60^\circ$. On constate que son extremum est bien un minimum ; et que le rouge donne une déviation plus faible que le violet, quelle que soit l'incidence.

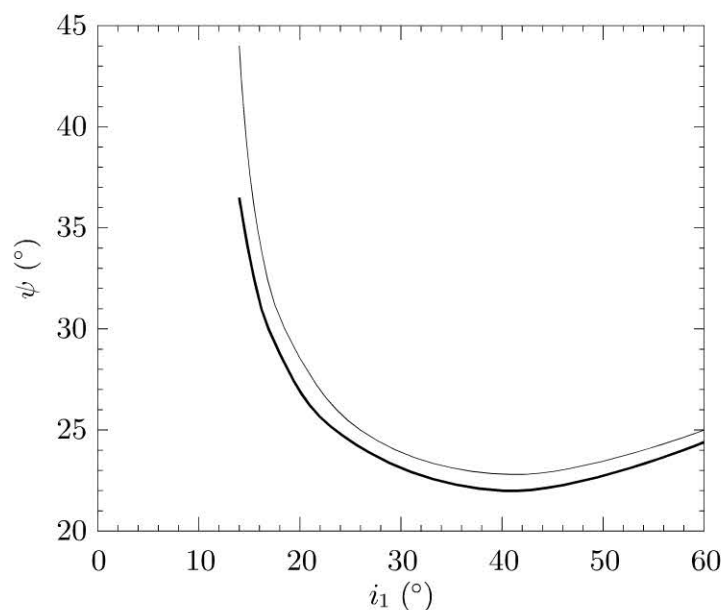


Figure 45 Déviation en fonction de l'incidence, pour l'indice de la glace dans le rouge ($n = 1,307$, trait épais) et dans le violet ($n = 1,317$, trait fin).

Vérifications. On pourrait en principe dériver analytiquement l'équation (72) pour voir si son minimum redonne bien l'équation (70). Ce serait une façon lourde et inélégante de déterminer l'angle de déviation du prisme. En revanche, numériquement c'est très facile. On trouve, par exemple pour le rouge, que le minimum a une abscisse $i_1 = 41^\circ$, qui correspond bien à $\arcsin(n/2)$ (équations (66) et (67)) et une ordonnée de $21,6^\circ$, qui correspond bien à l'équation (70).

► Question 6.5.

Graphique. D'après la figure 45, toute la lumière réfractée est déviée à un angle égal à 22° ou plus grand. Quand on regarde près du Soleil, on ne voit donc aucun rayon réfracté : le ciel apparaît légèrement plus clair à l'extérieur qu'à l'intérieur du halo.

Plus précisément (voir la figure 46) :

- Quand on regarde dans une direction ψ entre 0° et 22° , on ne voit aucune contribution due à la réfraction.
- Quand on regarde dans la direction de la couronne $22^\circ \leq \psi \leq 25^\circ$, on voit la contribution des rayons incidents qui balayent toute la gamme $25^\circ \leq i_1 \leq 60^\circ$, soit $(60 - 25)/60 = 58\%$ des angles d'incidence possibles ! Le halo représente donc la majorité de la lumière réfractée.
- Quand on regarde à l'extérieur du halo, $25^\circ \leq \psi \leq 35^\circ$, on reçoit la contribution des incidences $15^\circ \leq i_1 \leq 25^\circ$, soit une fraction $(25 - 15)/60 = 17\%$ de la lumière réfractée. C'est une petite fraction, répartie sur une large couronne, donc elle est difficile à voir.

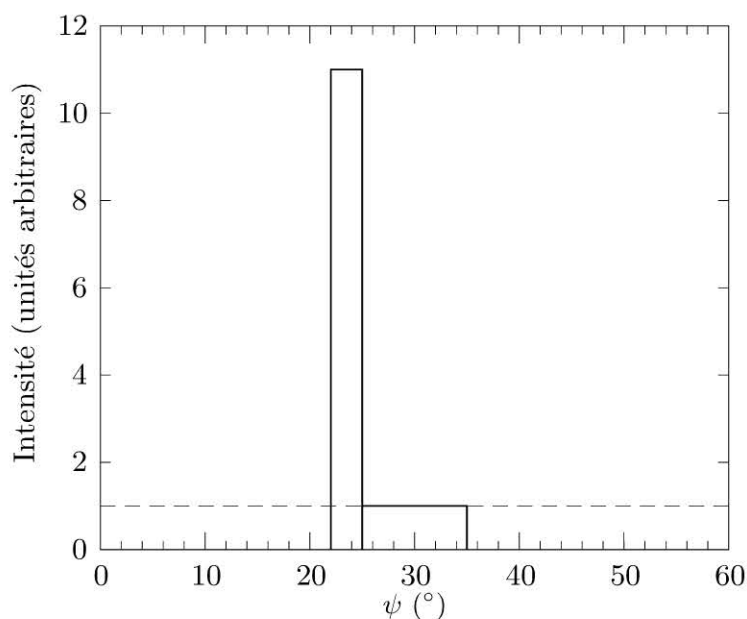


Figure 46 Intensité réfractée visible dans le halo (unités arbitraires).

On prend comme référence l'intensité incidente (pointillés), et l'on appelle I son intégrale totale. Pour $22^\circ \leq \psi \leq 25^\circ$ on trace une boîte dont la surface vaut 58 % de I , pour $25^\circ \leq \psi \leq 35^\circ$ une boîte dont la surface vaut 17 % de I . Pour une figure plus précise, voir référence [2].

Notes.

- La concentration de l'intensité lumineuse en une petite région est analogue à ce qui se passe dans une caustique, voir référence [3] et page 198.
- Les cristaux de glace ont souvent une symétrie d'ordre 6, due à la façon dont les molécules d'eau s'ordonnent en un réseau cristallin. Cette symétrie d'ordre 6

peut s'exprimer par une forme d'hexagone régulier (figure 44) : il se trouve que c'est le cas des cristaux des cirrus de haute altitude. Mais cette forme d'hexagone n'est pas indispensable. Ce qui compte ici, en particulier pour la simplification de la question 6.2, c'est la symétrie : il faut que les différentes faces fassent des angles multiples de 60° . Ainsi les flocons de neige avec leurs formes variées, symétriques mais pas du tout hexagonales, peuvent eux aussi former un halo.

- La loi de la réfraction, équation (62) semble avoir été écrite correctement pour la première fois par Ibn Sahl dans un traité écrit entre 983 et 985 [4]. Depuis, elle a été reprise ou redécouverte par Ibn al-Haitham dit Alhazen, 965-1039, puis Harriot en 1602, Snell 1621, Descartes 1637. C'est donc abusivement qu'on l'attribue à ces deux derniers.

Ouvertures. Les cristaux des cirrus de haute altitude sont en fait des prismes à base hexagonale : ils se terminent au bout par des faces à angle droit. Montrez (équation (69)) que cet angle $\alpha = 90^\circ$ contribue à former un autre halo, de rayon angulaire 46° . On l'appelle le « grand halo » ; pour le voir il faudrait que les cristaux soient orientés verticalement (leur axe de symétrie dirigé vers le Soleil), ce qui est bien plus rare en pratique.

Montrez en revanche que le prisme à 120° constitué par deux faces adjacentes ne forme pas de halo. Montrez qu'il peut exister d'autres halos moins intenses, dûs aux autres angles et en particulier à des réflexions.

Reprenez les mêmes questions que ci-dessus avec l'arc-en-ciel, dû aux gouttelettes d'eau. Il y a quelques différences :

- L'indice est très légèrement différent (c'est de l'eau, $n = 1,33$, et non de la glace) ;
- Les gouttes sont plus symétriques : elles sont sphériques, donc elles n'offrent pas toutes les possibilités des divers angles mentionnés ci-dessus ; et les calculs sont plus compliqués.
- les rayons qui contribuent à l'arc-en-ciel sont ceux qui ont subi au moins une réflexion dans la goutte avant d'en ressortir ;
- L'arc-en-ciel est visible du côté opposé au Soleil ; donc on n'est pas ébloui ; donc on peut voir même les arcs-en-ciel secondaires plus faibles dûs aux réflexions successives.

Sources et références

Voir l'article [5] pour les images, [5] et [2] pour une liste des différents halos visibles, [2] pour la méthode de calcul, [1] pour la justification du passage en deux dimensions, [3] pour la répartition de l'intensité.

[1] R.A.R. TRICKER. *Introduction to Meteorological Optics*. Elsevier, New York, 1970.

[2] M. DENNY. Calculation of the 22° halo. *European Journal of Physics*, volume 18, 1997, pages 432-435.

- [3] M.V. BERRY et S. KLEIN. Diffraction near fake caustics. *European Journal of Physics*, volume 18, 1997, pages 303-306.
- [4] B. GUIZAL et J. DUDLEY. Ibn Sahl, inventeur de la loi de la réfraction. *Pour la Science*, volume 301, novembre 2002, pages 24-26.
- [5] D. LYNCH. Arcs et halos atmosphériques. *Pour la Science*, volume 8, juin 1978, pages 80-82.

Corrigé 7 Des glaces qui sortent de leur plan (Énoncé à la page 19)

Commentaire. Il s'agit d'optique : est-ce de l'optique géométrique, ou doit-on tenir compte explicitement de la nature ondulatoire de la lumière ? Et quelles sont les difficultés de cet exercice ?

Tous les problèmes de miroirs se ressemblent *a priori* : il s'agit d'optique géométrique. On écrit que l'angle réfléchi est égal à l'angle incident. En pratique, il est très difficile de traiter directement le cas général ; pour se forger une intuition, il vaut mieux avoir déjà traité les cas plus simples, par ordre de difficulté croissante : le plan (cas usuel), la parabole, le cône, le cylindre, la sphère, et pour finir le cas général.

Attention :

- Il n'est pas toujours possible de définir un axe optique (pour faire l'hypothèse qu'on reste à son voisinage) : soyez vigilant au coup par coup.
- Dans chaque cas, il est plus facile de traiter le cas où l'œil est très loin, plutôt que le cas où l'œil est à distance finie.
- Quand un objet a une image précise, on dit que le miroir est « stigmatique ». Dans le cas contraire, on a astigmatisme : l'image d'un point par le miroir est formée de plusieurs points, voire d'une tache floue.

► Question 7.1.

Première approche. Ce qu'il faudrait faire en principe, c'est faire tourner le récipient lui-même, à vitesse assez régulière pour que l'eau soit finalement entraînée : c'est facile dans un laboratoire, mais c'est difficile de faire l'essai soi-même dans son évier. En effet, si l'on se contente de faire tourner une cuillère dans un verre d'eau, on obtient un tourbillon, mais ce n'est pas du tout une rotation en bloc.

La difficulté de cette question est de bien poser les équations. Avant de passer à la suite de la correction, vous devez donc vous demander : il s'agit de mécanique, mais de quelle partie de la mécanique s'agit-il ? quelles conditions faut-il exprimer ? dans quel repère cela sera-t-il le plus facile ? Tentons de répondre point par point à ces questions.

Analyse qualitative. Il s'agit d'une rotation solide. On a donc deux possibilités ;

- Soit vous choisissez de travailler dans votre référentiel. En ce cas le liquide est en mouvement, il s'agit d'hydrodynamique. Vous devrez exprimer le principe fondamental de la dynamique.
- Soit vous choisissez de travailler dans le référentiel en rotation. Il s'agit alors d'hydrostatique. Vous devrez exprimer que, dans ce référentiel, le liquide est à l'équilibre. Il vous faudra alors faire la liste des forces qui agissent sur un élément de fluide : forces de pression dues à ses voisins, force de pesanteur due à la Terre, et « force » d'inertie due au fait que le référentiel est en rotation par rapport à votre référentiel galiléen.

Lequel est le plus simple ? Pour le savoir, commencez brièvement à tester ces deux pistes. Vous verrez vite que le référentiel en rotation est ici un choix préférable. En revanche, vous constaterez qu'il vous manque quelque chose pour répondre à la question, qui est : « quelle est la forme de la surface ». Alors, que faut-il écrire d'autre, avant de partir tête baissée dans les calculs ?

Réponse : la surface libre d'un liquide en équilibre, c'est l'ensemble des points qui sont à la pression atmosphérique. C'est d'ailleurs de cette façon qu'on définit l'horizontale, ou « le niveau de la mer », comme une surface isobare : sa forme est déterminée par le champ de pesanteur de la Terre, avec une petite correction à cause des forces d'inertie dues à sa rotation sur elle-même.

Notations. Le plus difficile est fait. Le choix des notations est simple (figure 47). Appelons ainsi ω la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe vertical, et plaçons-nous dans un référentiel en rotation à vitesse ω . Le problème est à symétrie cylindrique, on prendra donc $z\hat{e}_z$ pour repérer la cote d'un point, et $\vec{r} = r\hat{e}_r$ pour repérer sa distance à l'axe, avec comme origine le point O à l'intersection de la surface et de l'axe.

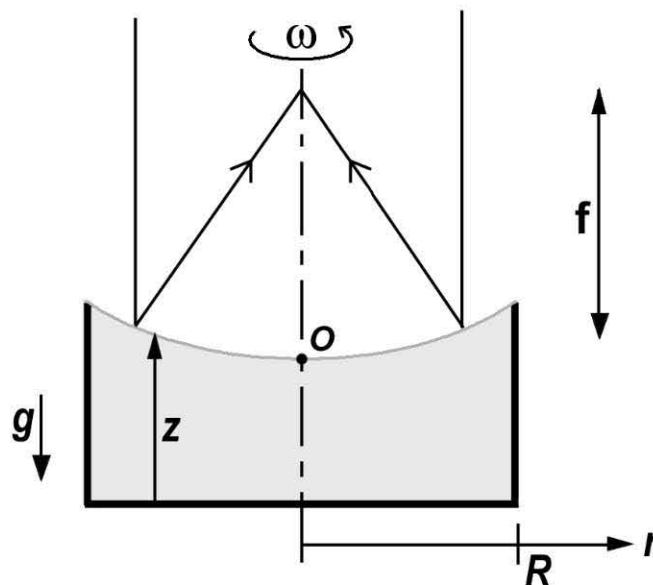


Figure 47 Notations pour la surface libre de l'eau qui tourne en bloc.

Mise en équations. On considère un élément de volume d'eau d^3V . Il subit les trois forces suivantes :

- la pesanteur, due à la Terre : $-\rho g \hat{e}_z d^3V$, où ρ est sa masse volumique, $-g \hat{e}_z$ l'accélération de la pesanteur ;
- la force due aux éléments de liquide voisins : $-\vec{\nabla} P d^3V$, où $P = P(\vec{r}, z)$ est la pression qui règne au sein du liquide ;
- la « force » d'inertie $+\rho \omega^2 \vec{r} d^3V$ qui exprime le changement de référentiel ; en régime stationnaire toutes les vitesses sont nulles dans le repère tournant, donc il n'y a pas de « force » de Coriolis.

On écrit alors que, en régime permanent, la somme des forces s'exerçant sur le petit élément de volume est nulle :

$$-\rho g \hat{e}_z d^3V - \vec{\nabla} P(\vec{r}, z) d^3V + \rho \omega^2 \vec{r} d^3V = \vec{0}. \quad (73)$$

Rappelons que ce qu'on cherche, c'est l'ensemble des points qui sont à la pression atmosphérique P_{atm} .

Résolution. Après une première simplification de l'équation (73) :

$$-g \hat{e}_z - \vec{\nabla} \frac{P(\vec{r}, z)}{\rho} + \omega^2 \vec{r} = \vec{0},$$

l'astuce consiste à la réécrire sous forme d'un gradient :

$$\vec{\nabla} \frac{P(\vec{r}, z)}{\rho} = \vec{\nabla} \left(-gz + \omega^2 \frac{r^2}{2} \right).$$

On en tire, en prenant comme origine O l'un des points de la surface, où $P(O) = P_{\text{atm}}$:

$$\frac{P(\vec{r}, z)}{\rho} - \frac{P_{\text{atm}}}{\rho} = -gz + \omega^2 \frac{r^2}{2}.$$

La forme de la surface libre, définie par $P(\vec{r}, z) = P_{\text{atm}}$, s'écrit :

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}. \quad (74)$$

Il s'agit d'une parabole.

Vérifications. L'équation (74) est homogène, car son membre de droite a des $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ au numérateur et des $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ au dénominateur. Le signe est correct :

conformément à l'intuition, la concavité de la parabole est tournée vers le haut. On peut aussi vérifier le comportement : quand ω diminue, ou quand g augmente, on voit que z diminue (pour un r fixé) ; autrement dit, la parabole se rapproche de la surface horizontale, qui est la solution triviale lorsque ω^2/g diminue.

Commentaires. Quelle est la propriété d'un miroir parabolique ? Il conjugue le foyer de la parabole avec un point situé à l'infini (voir les rayons dessinés sur la figure 47). Il est donc utile dès qu'on veut former un faisceau parallèle en partant d'une source ponctuelle : par exemple, les réflecteurs de projecteurs et de phares ; ou au contraire concentrer en un point proche toute l'énergie reçue depuis un émetteur situé au loin : par exemple, les antennes paraboliques pour capter les signaux des satellites.

Quel est donc l'intérêt d'un miroir liquide ? Il peut former l'image près de nous d'un émetteur situé au loin. On peut donc construire un télescope, dans le but de faire de l'astrophysique.

Comment trouver un liquide réfléchissant ? L'idéal est de choisir un métal liquide à température ambiante : par exemple, le mercure, ou encore le gallium, moins toxique (voir la figure 48). En effet, un métal réfléchit presque 100 % de la lumière visible (soit bien mieux qu'un diélectrique, par exemple l'eau, qui ne réfléchit que quelques pourcents de la lumière en incidence normale).

Peut-on passer en revue les avantages et les inconvénients ? Le principal avantage est qu'on a une parabole d'excellente qualité, donc un stigmatisme de qualité optique, sans avoir à réaliser de polissage. Pour un miroir de plusieurs mètres, le coût est immédiatement divisé par plusieurs ordres de grandeur. L'inconvénient est que ce télescope n'est pas orientable ! On ne peut donc observer qu'à la verticale. En pratique, cet inconvénient n'est pas si grave, et on le compense de différentes façons : en rajoutant au foyer un petit miroir orientable, on vise un petit peu à côté de l'axe optique, environ 10° de part et d'autre ; en observant tout au long de la nuit, on couvre en pratique toute une bande de ciel de 10° de large ; et en construisant de tels télescopes à différents points de la Terre (grâce à leur coût réduit), on couvre finalement une large partie du ciel observable. Finalement, sans supplanter les miroirs en verre, ces miroirs liquides les complètent utilement (voir référence [1]).

Choix des paramètres. Si l'on veut observer un objet, par exemple une galaxie, d'angle apparent α , le miroir forme au voisinage de son foyer une image de dimension $f\alpha$. On aimerait donc prendre la focale f du miroir la plus grande possible. Or elle est proportionnelle au rayon de courbure du miroir.

D'après l'équation (74), f est donc déterminée par g/ω^2 . La gravité est indispensable pour le fonctionnement de ce miroir : on ne le construira donc pas dans l'espace, mais sur Terre. Donc g est fixé ; le seul paramètre qu'on peut choisir est la vitesse de rotation ω .

Comme pour tout instrument d'optique (jumelles, microscope, télescope, appareil photo), il faut faire un compromis entre le grandissement et la luminosité, caractérisée par le nombre d'ouverture : le rayon divisé par la focale (voir page 203). Or il



Figure 48 Un miroir en gallium liquide construit par l'équipe de E. Borra.

est difficile de construire un grand plateau tournant : il faut bien stabiliser la vitesse, et éviter les vibrations qui rident la surface.

En pratique, on obtient un bon compromis avec un miroir de plusieurs mètres de diamètre (voir la figure 48). Avec une période de rotation de dix secondes, soit $\omega = 0,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, la focale est de l'ordre de la dizaine de mètres. La vitesse linéaire du bord du miroir reste raisonnable : $v = \omega R$ est de quelques mètres par seconde.

► Question 7.2.

Simplifications. L'objet est sur la table, à l'extérieur du cône. On voit son image à l'intérieur du cône. Le rayon AB se reflète vers l'œil, et donc on le voit comme s'il venait de C (voir la figure 49). Il faut trouver la transformation qui passe de AB à BC .

On a intérêt à écrire que l'œil est placé loin du cône, à une distance bien supérieure à la taille du cône. Mal vérifiée en pratique, cette approximation est justifiée car elle simplifie les calculs tout en gardant l'essentiel de la physique (voir page 4). En revanche, il serait inutile et abusif d'écrire qu'on reste au voisinage de l'axe. Pour des calculs détaillés, on consultera l'article [2].

La condition qu'on doit écrire est donc que les rayons BC sont à peu près verticaux, donc que les rayons AB font avec la verticale un angle 2θ , double du rayon angulaire du cône. Moyennant cette supposition, on se ramène à un problème de géométrie : trouver la relation entre le point A et le point C . Il vaut mieux prendre le problème à l'envers : connaissant C , trouver A .

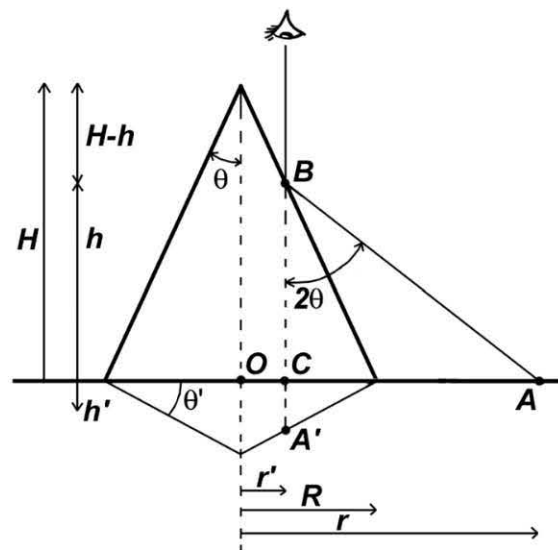


Figure 49 Réflexion sur un miroir conique d'axe vertical.

Attention, on a représenté ici un angle θ' arbitraire : sa valeur exacte sera déterminée plus tard, cf. l'équation (83).

Notations.

Les notations peuvent être par exemple :

- pour le cône : hauteur H , rayon angulaire θ , rayon au sol R ;
- pour le point B : hauteur h , distance à l'axe r' ;
- pour le point A : hauteur 0 , distance à l'axe r .

Mise en équations et résolution. On utilisera la relation géométrique du cône :

$$\frac{r'}{H-h} = \frac{R}{H} = \tan \theta. \quad (75)$$

On écrit alors la même relation pour le rayon AB , et on déroule la manivelle :

$$\frac{r-r'}{h} = \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2R/H}{1 - R^2/H^2}. \quad (76)$$

Avec l'équation (75), on peut réécrire le dénominateur de l'équation (76) :

$$h = H \left(1 - \frac{r'}{R} \right),$$

ce qui permet d'éliminer h de l'équation (76) :

$$r - r' = H \left(1 - \frac{r'}{R} \right) \frac{2R/H}{1 - R^2/H^2}.$$

On en tire finalement :

$$r = r' + 2(R - r') \frac{H^2}{H^2 - R^2}. \quad (77)$$

Vérifications.

- L'équation (77) est visiblement homogène.
- Les signes sont-ils corrects ? On voit déjà que r est supérieur à r' . Pour vérifier s'il est supérieur à R , il faut calculer $r - R$, et l'on trouve :

$$r - R = (R - r') \frac{H^2 + R^2}{H^2 - R^2}, \quad (78)$$

ce qui est bien positif. Notons d'ailleurs qu'en inversant l'équation (78), on peut trouver l'expression directe, qui donne cette fois r' en fonction de r :

$$R - r' = (r - R) \frac{H^2 - R^2}{H^2 + R^2}. \quad (79)$$

- Enfin, comment se comporte cette expression ? Comme le problème est à symétrie circulaire, un cercle de rayon r centré sur le cône se transforme en un cercle concentrique de rayon r' . Quand r' augmente, on voit r décroître, ce qui veut dire que l'image est inversée : c'est normal, puisque le cône est un miroir. Quand r' atteint la valeur $r' = R$, on a aussi $r = R$, ce qui est conforme à l'intuition. On voit enfin que H doit être strictement supérieur à R ; si l'on a $H = R$, le point A est rejeté au loin : c'est bien ce qu'on attend pour un cône d'angle $\pi/4$.

Mise en équations et résolution. Où se forme l'image ? L'image de A est en A' , défini comme le point de la droite BC tel que la distance $A'B$ soit la même que la distance AB .

Il suffit de calculer la hauteur du point A' . Notons h' la distance de A' au plan de la table. Il faut l'orienter : par exemple, comptons h' positivement si A est en-dessous du plan de la table ; il faudra vérifier les signes. Déroulons alors la manivelle :

$$\begin{aligned} A'B &= AB, \\ h + h' &= \frac{h}{\cos 2\theta} = h \frac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta}, \\ h' &= h \left[\frac{1 + \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta} - 1 \right] = h \frac{2 \tan^2 \theta}{1 - \tan^2 \theta} \\ &= H \left(1 - \frac{r}{R} \right) \frac{2R^2}{H^2} \frac{1}{1 - R^2/H^2}. \end{aligned} \quad (80)$$

On en tire finalement h' en fonction de r' , et même de r en utilisant l'équation (79) :

$$h' = \frac{2RH(R - r')}{H^2 - R^2} = \frac{2RH(r - R)}{H^2 + R^2}. \quad (81)$$

Vérifications. Les vérifications sont faciles :

- L'équation (81) est homogène.
- h' est bien positif tel qu'on l'a compté (c'est-à-dire en-dessous du plan de la table).
- Le comportement est correct : h' s'annule quand $r = r' = R$. On voit aussi que h' augmente quand r augmente et r' tend vers 0 : c'est conforme à l'intuition.

L'image est aussi un cône. Sa hauteur est la valeur maximum atteinte par h' , soit $2R^2H/(H^2 - R^2)$. L'angle θ' défini sur la figure 49 est donné par :

$$\begin{aligned} \tan(\theta') &= \frac{h'}{R - r'} = \frac{2RH}{H^2 - R^2} \\ &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \tan 2\theta, \end{aligned} \quad (82)$$

donc :

$$\theta' = 2\theta. \quad (83)$$

Si l'on avait calculé le rayon angulaire de ce cône, c'est-à-dire $\pi/2 - \theta'$, on aurait bien trouvé que sa tangente vaut $1/\tan 2\theta$, d'où le même résultat.

L'image est donc singulière si $\theta' = 0$, c'est-à-dire $\theta = \pi/4$ et $H = R$: en effet, en ce cas, les rayons sont rejetés à l'infini (voir page 101).

► Question 7.3.

Analyse qualitative. Le cylindre ressemble au cas précédent. Qualitativement, l'image ressemble assez à celle qu'on obtient pour un cône dont les parois sont presque verticales, $\theta \ll 1$.

Cependant, quantitativement, il y a des différences. Il ne suffit pas de prendre les équations du cône et de faire tendre $\theta \rightarrow 0$. En effet, les équations (77), (78) et (79) supposaient qu'on avait placé l'œil sur l'axe du cône. Or pour un cylindre, si l'œil est à l'extérieur du miroir, il ne peut pas être sur l'axe.

On peut essayer de résoudre cet exercice de géométrie : il est assez lourd, sans grande surprise, sans beaucoup de symétrie. Il est intéressant si l'on veut dessiner des anamorphoses exactes. L'article [2] donne les détails.

Cet article [2] montre qu'ici aussi, le calcul se simplifie si on place l'œil à une hauteur h grande devant la taille du miroir et de l'image. Comme l'œil est à une dis-

tance d non nulle de l'axe, la ligne de visée fait avec la verticale un angle $\beta = \arctan(d/h)$ non nul. On note x et y les coordonnées dans le plan horizontal : x perpendiculaire et y parallèle au plan de visée (plan vertical contenant l'œil et l'axe du cylindre). En prenant le rayon du cylindre comme unité de longueur pour alléger l'écriture, l'article [2] donne la loi de transformation :

$$\begin{aligned}x' &= x \left(3 - 2x^2 + \frac{2y}{\cos \beta} \sqrt{1 - x^2} \right), \\y' &= 2 (1 - x^2)^{3/2} + \frac{y}{\cos \beta} (1 - 2x^2).\end{aligned}\quad (84)$$

Comme l'œil n'est pas sur l'axe, on ne retrouve pas exactement des cercles concentriques, et un objet centré sur le miroir se transforme en une image un peu décalée.

► Question 7.4.

Analyse qualitative. Alors, pourquoi une boule de Noël nous donne-t-elle l'impression d'être si brillante ? C'est qu'une sphère reflète l'espace presque entier (voir la figure 7). S'il y a une source de lumière dans la pièce, par exemple une bougie, on peut toujours trouver un rayon lumineux qui relie la bougie et notre œil en se reflétant dans la boule. On voit donc, dans la même boule, toutes les bougies à la fois : la boule semble « capter la lumière ».

Ce n'est pas le cas pour un miroir plan : bien que sa surface soit au moins aussi réfléchissante qu'une boule de Noël, il ne reflète qu'une petite partie de la pièce.

► Question 7.5.

Notations. Au vu des questions 7.1 à 7.4, quelle méthode proposez-vous pour traiter le cas général ?

Le miroir est une surface, d'équation $f(x, y, z) = 0$; on note B un point du miroir. L'objet est caractérisé par un ensemble de points, qu'on connaît ; on appelle A un point de l'objet. Par exemple, si l'objet est un dessin, A est sur une surface, d'équation $g(x, y, z) = 0$.

Et l'œil ? L'œil fait l'image sur la rétine, à travers la pupille. Or la pupille est de dimensions bien plus petites que la taille des objets qu'on observe ici : la simplification qu'on fera, qui est la seule qu'on peut faire, c'est de considérer la pupille comme un point. On appellera ainsi O le point où est l'œil. On cherche alors le point A' , image de A par le miroir. Attention : A' dépend-il de O ?

Mise en équations. Attention : on voit le reflet à un endroit, puis si on déplace la tête on voit le reflet à un autre endroit. On dit qu'en général on n'a « aucune condition de stigmatisme ». Le miroir plan, et le miroir parabolique près de son axe, sont des exceptions ; c'est pourquoi ils sont plus faciles à traiter. Ici, comment écrivez-vous l'équation ?

Le problème direct consiste à se donner un point A de l'image, et à chercher le point B du miroir tel que le rayon AB soit réfléchi selon BO . En général, c'est inextricable.

On est alors obligé de poser le problème inverse. On se donne O et un point B du miroir, on prend un rayon OB et on regarde où il est réfléchi. Cela, c'est un problème bien posé. En effet, on définit la normale en B au miroir, à la condition que la surface du miroir n'ait pas de singularité en B . Le rayon OB se réfléchit symétriquement par rapport à cette normale, et l'on regarde où ce rayon réfléchi croise la surface du dessin.

En manipulant avec un miroir non plan, on constate vite qu'il n'y a aucune raison que la transformation soit bijective. À tout point B , il correspond un point A , ce qui fait que dans ce sens ça marche. En revanche, il peut y avoir des points A qui ne sont jamais atteints, ou au contraire atteints plusieurs fois : c'est pourquoi le problème direct ne marche pas.

Notes. Les anamorphoses sont devenues particulièrement populaires au XVI^e et XVII^e siècles, comme jeu sur les lois de la perspective.

Les plus courantes sont les anamorphoses planes, celles qu'on observe en regardant une surface, non pas en incidence normale, mais en oblique. Au XX^e siècle, elles ont envahi les routes. En effet, toutes les inscriptions peintes sur le goudron, destinées à être vues en oblique par un conducteur de voiture, sont artificiellement allongées : par exemple les flèches pour indiquer qu'on doit se rabattre, ou les vélos dessinés pour repérer les pistes cyclables.

Les anamorphoses cylindriques sont plus élaborées. On en trouve dans certains tableaux ; il existe aussi des tasses à café réfléchissantes (recouvertes d'aluminium), dans lesquelles se reflète une anamorphose dessinée dans la sous-tasse. La plupart des artistes dessinent leurs anamorphoses empiriquement, par exemple en travaillant avec un miroir, ou avec des abaques ; le calcul (équation (84)) permet de produire des anamorphoses « exactes », tout en gardant à l'esprit que le reflet ne sera jamais une vraie image stigmatique.

Les reflets dans une sphère sont souvent utilisés. L'avantage d'une sphère est que la transformation est bien bijective. Outre son aspect décoratif (question 7.4), une sphère réfléchissante permet aussi des auto-portraits, comme ceux du dessinateur Escher (voir la figure 7).

Pour les miroirs de forme quelconque, comme ceux des parcs d'attraction [3], il est amusant de comprendre quels sont les miroirs dans lesquels on se voit long et maigre, quels sont ceux dans lesquels on se voit petit et gros.

Ouvertures. Tout ce problème n'a considéré que la géométrie, donc la trajectoire des rayons. Or, en fonction de la réflexion, il peut y avoir des zones plus éclairées que d'autres. L'étude de l'intensité lumineuse constitue tout un problème en soi ; on en voit un exemple page 93.

Sources et références

On trouvera dans l'article [2] des calculs détaillés, une discussion de notre perception et donc des corrections artistiques, ainsi qu'une bonne bibliographie. La référence [4] est la réédition d'un livre du début XX^e siècle, constituée de vingt-quatre images ; le « miroir » est fourni : il s'agit d'une simple feuille de plastique métallisée, qu'on peut rouler en forme de cylindre.

- [1] E. F. BORRA. Les miroirs liquides d'Ermanno Borra. *Pour la Science*, 198, avril 1994, p. 68-73.
- [2] J. L. HUNT, B. G. NICKEL et C. GIGAULT. Anamorphic Images. *American Journal of Physics*, volume 68, 2000, pages 232-237.
- [3] HERGÉ. *Les aventures de Tintin – Le trésor de Rackham le Rouge*. Casterman, Tournai, 1944.
- [4] BROS McLOUGHLIN. *The magic mirror*. Dover, New-York, 1979.
- [5] M. ANNO and M. ANNO. *Anno's Magical ABC*. Bodley Head, London, 1981.
- [6] M. GARDNER. Mathematical Games. *Scientific American*, volume 232, 1975, pages 110-116.
- [7] J. WALKER. The Amateur Scientist. *Scientific American*, volume 245, 1981, pages 176-187.

Corrigé 8 Champs légers, fleurs dans la pente et charges véritables (Énoncé à la page 20)

► Question 8.1.

Mise en équations. On cherche le champ magnétique $\vec{B}(O)$ créé en un point O par un fil conducteur parcouru par un courant I (voir figure 50). Pour cela, il faut d'abord déterminer la contribution $d\vec{B}$ d'un petit morceau de fil, $d\vec{s}$. Notons : M le point où est situé le petit morceau de fil ; $\vec{r} = \vec{OM}$ le vecteur orienté de O vers le fil (attention, dans de nombreux livres c'est l'orientation inverse qui est choisie) ; et μ_0 la permittivité magnétique de l'espace vide. Alors la loi de Biot-Savart énonce que $d\vec{B}$ vaut :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{r} \wedge d\vec{s}}{r^3}. \quad (85)$$

C'est une expression vectorielle, peu maniable. Comment pouvez-vous la simplifier ? Si tout le fil, ainsi que le point O , est contenu dans un seul plan, alors $\vec{r} \wedge d\vec{s}$

est toujours parallèle à la même direction : la normale \hat{e}_z à ce plan. Plus précisément :

$$\vec{r} \wedge d\vec{s} = r^2 d\theta \hat{e}_z,$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaires de M ; donc en intégrant sur la longueur du fil :

$$\vec{B}(O) = \int_{\text{fil}} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r^2 d\theta \hat{e}_z}{r^3}. \quad (86)$$

Finalement, $\vec{B}(O) = B(O)\hat{e}_z$ et le problème vectoriel se ramène au calcul du scalaire $B(O)$:

$$B(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{fil}} \frac{d\theta}{r(\theta)}. \quad (87)$$

Connaissant la forme du fil, on peut en déduire $B(O)$, surtout si l'on a une expression analytique de $r(\theta)$.

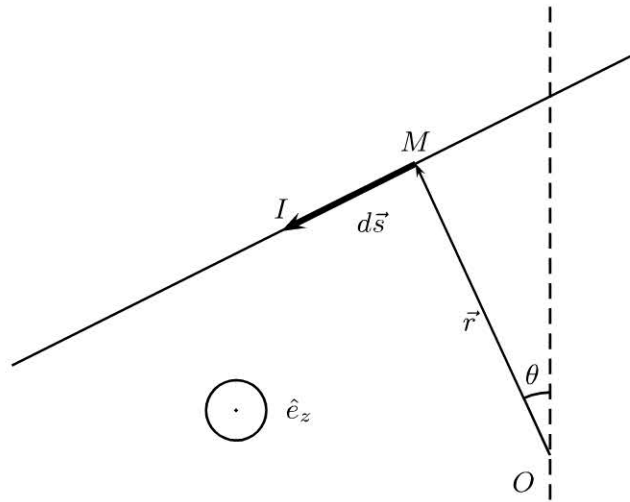


Figure 50 Notations pour le champ créé en O par l'élément de fil $d\vec{s}$.

Lorsque le fil est une boucle fermée qui ne s'auto-intersecte pas, et lorsque O est à l'intérieur de cette boucle, alors θ varie de 0 à 2π . On a donc :

$$B(O) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\theta}{r(\theta)} = \frac{\mu_0 I}{2} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle. \quad (88)$$

Quelle que soit la forme du fil, le champ ne dépend que de la valeur moyenne de $1/r$! On vérifie immédiatement cette équation (homogénéité, signe, et comportement) en prenant le cas particulier où $r(\theta) = R$ est constant, auquel cas l'équation (88) se ramène bien au champ qu'une boucle circulaire crée en son centre :

$$B(O) = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (89)$$

► Question 8.2.

Résolution. On peut résoudre cette question par deux méthodes.

– Première méthode :

Pour la tige (voir la figure 51), on a $r(\theta) = R/\cos\theta$, donc l'équation (87) se calcule analytiquement. Le champ dépend de la longueur $AB = 2R \tan\alpha$:

$$\begin{aligned} |\vec{B}(C)| &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_A^B \cos\theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\sin(\theta_{\max}) - \sin(\theta_{\min})] = \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{2\pi R}. \end{aligned} \quad (90)$$

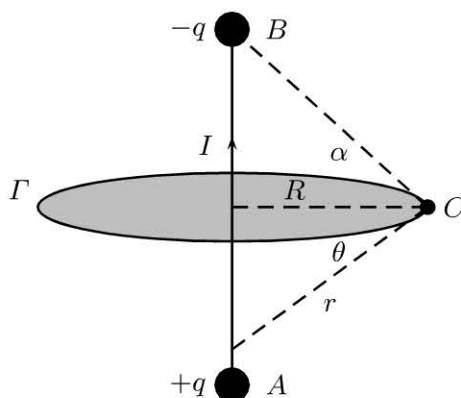


Figure 51 Notations pour le champ créé en C par la tige (fil fini).

– Deuxième méthode :

On aurait pu être tenté d'utiliser une méthode indépendante : le calcul de la circulation de \vec{B} le long d'un cercle Γ de rayon R centré sur la tige AB . En effet, compte tenu des symétries du problème, $\vec{B}(C)$ est orthoradial, et le théorème d'Ampère appliqué au cercle Γ indiquerait :

$$\mu_0 I = \oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{l} = 2\pi R |\vec{B}(C)|. \quad (91)$$

On trouverait alors une expression identique à celle d'un fil infini :

$$|\vec{B}(C)| = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (92)$$

Pourquoi les équations (90) et (92) sont-elles différentes ? Où est l'erreur ?

Analyse qualitative. L'équation (92) est un peu dérangement. Ainsi, elle est indépendante de la longueur AB , ce qui est peu vraisemblable, par exemple quand $AB \ll R$. On peut se demander ce que c'est qu'un « fil non connecté parcouru par un courant ». Ce n'est pas strictement impensable : par exemple, si le fil porte une

charge $+q$ au bout A , une charge $-q$ au bout B , et si des charges circulent de A vers B (voir la figure 51). Alors, où faut-il apporter quelques corrections ?

Le point essentiel est le suivant : q varie avec le temps [1] ! Ainsi, sur l'exemple de la figure 51, $q(t)$ est une fonction décroissante du temps :

$$I = -\dot{q} > 0.$$

Or ces charges fixes créent un champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$: ce champ dépend lui-même du temps. Malgré les apparences, on n'est donc pas en magnétostatique : c'est bel et bien une situation d'électromagnétisme.

Mise en équations. On peut donc écrire le théorème d'Ampère, mais il faut le faire plus complètement que sur l'équation (91). Pour cela, il faut repartir de l'équation de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (93)$$

et prendre son flux à travers le cercle Γ . Après calcul du champ électrique créé par les charges $+q(t)$ et $-q(t)$ on trouve :

$$\begin{aligned} 2\pi R |\vec{B}(C)| &= \oint_{\Gamma} \vec{B} d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial [q(t)(1 - \sin \alpha)]}{\varepsilon_0 \partial t} \\ &= \mu_0 I - \mu_0 I (1 - \sin \alpha). \end{aligned} \quad (94)$$

Le terme correctif est juste ce qu'il faut pour retrouver l'équation (90) :

$$|\vec{B}(C)| = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{2\pi R},$$

qui est donc la seule correcte (voir « **Ouvertures** »).

► Question 8.3.

Mise en équations. Comme le bord des pétales forme une boucle fermée, on peut utiliser l'équation (88). Seule compte la valeur de $\langle 1/r \rangle$, la forme exacte ne joue aucun rôle. Pour décrire la forme des pétales, on peut donc choisir une expression analytique qui simplifie les calculs ; par exemple (voir la figure 52) :

$$r(\theta) = R[1 + \varepsilon \cos(n\theta)], \quad (95)$$

où r est la distance comptée depuis le point B , n est le nombre de pétales, ε décrit l'anisotropie de la courbe ($\varepsilon = 0$ pour un cercle), et $R = \langle r \rangle$ est la moyenne du rayon r .

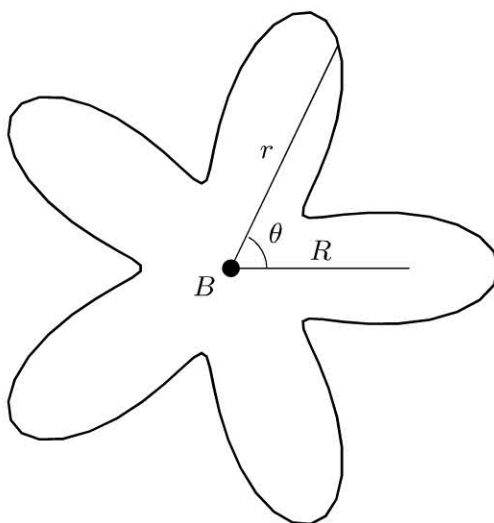


Figure 52 Tracé de l'expression analytique (95) qui modélise les pétales de la fleur. On a pris ici $n = 5$ pétales et $\varepsilon = 0,5$. En pointillés : cercle, $\varepsilon = 0$.

Résolution. Attention, la moyenne de $1/r$ n'est pas $1/\langle r \rangle = 1/R$! C'est en réalité (équation (95)) :

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R[1 + \varepsilon \cos(n\theta)]} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (96)$$

En injectant l'équation (96) dans l'équation (88) on trouve le champ magnétique au centre :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (97)$$

Commentaire. La seule grandeur importante, outre R , est donc $|\varepsilon|$:

- Quand $|\varepsilon| = 0$ on retrouve bien la spire circulaire (équation (89)).
- Quand $|\varepsilon|$ grandit le champ augmente.
- Finalement, le champ diverge quand $|\varepsilon| = 1$, c'est-à-dire quand la courbe s'auto-intersecte au centre.

En revanche, ce qu'on n'aurait guère pu imaginer au début, c'est que le nombre n de pétales ne joue pas ! *A posteriori*, cela justifie donc bien qu'on puisse choisir une expression approchée, du type de l'équation (95).

► Question 8.4.

Mise en équations. De façon tout à fait identique, on peut modéliser la feuille par une équation qui simplifie les calculs, par exemple la spirale logarithmique :

$$r(\theta) = R e^{p\theta}, \quad (98)$$

où p , qui n'est pas nécessairement un nombre entier, est le paramètre de la spirale. Si l'on raccorde $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$, on trouve une forme qui ressemble à un escargot (voir la figure 53).

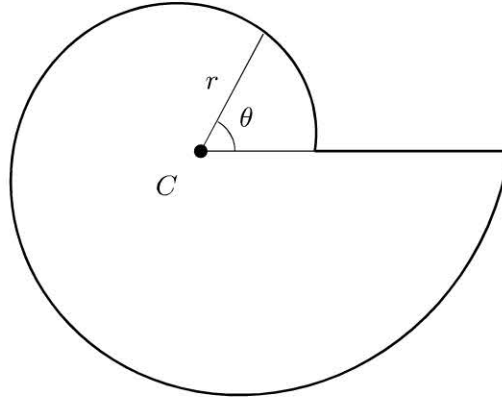


Figure 53 Tracé de l'expression analytique (98) qui modélise la feuille de la fleur.

On a pris ici $p = 1/2\pi$.

L'équation (98) donne :

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R e^{p\theta}}, \quad (99)$$

L'équation (88) donne le champ magnétique au centre :

$$B(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left[\frac{1 - e^{-2\pi p}}{2\pi p} \right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi p} \left[\frac{1}{r(0)} - \frac{1}{r(2\pi)} \right]. \quad (100)$$

Quand $p \ll 1$, on peut développer l'exponentielle :

$$e^{-2\pi p} = 1 - 2\pi p + 2\pi^2 p^2 + O(p^3),$$

l'équation (100) devient approximativement :

$$B(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} [1 - \pi p + O(p^2)]. \quad (101)$$

Cela redonne bien la spire circulaire (équation (89)) quand $p \rightarrow 0$.

Notes. Sur la figure 53, il y a un morceau de fil qui est droit. Il ne contribue pas au champ magnétique au point C (équation (100)). On peut le comprendre de deux façons équivalentes :

- 1) Sur ce morceau de fil, $d\vec{s}$ est parallèle à \vec{r} , donc le produit vectoriel dans l'équation (85) est nul.
- 2) Sur ce morceau de fil, θ est constant, donc $d\theta = 0$ dans l'équation (88).

Ouvertures. Ce qui précède est de la magnétostatique, c'est-à-dire que les charges et les courants sont constants dans le temps. Or on peut démontrer que l'expression de Biot et Savart, équation (85), est correcte même quand les charges et les courants varient dans le temps (donc hors de la magnétostatique). Faites la démonstration en supposant que les charges et courants varient suffisamment lentement (s'ils varient vite, c'est plus compliqué [2, 3]). Pour cela, partez de l'expression de Biot et Savart intégrée sur un volume \mathcal{V} :

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \wedge \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{j}(\vec{r})}{r} d^3\vec{r}. \quad (102)$$

Prenez le rotationnel de chaque membre de l'équation (102). Faites ainsi intervenir la divergence de \vec{j} . Remplacez-la par $(-\partial\rho/\partial t)$:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(O) = \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \vec{\nabla} \int_{\mathcal{V}} \left(-\frac{\partial\rho}{\partial t} \right) \frac{d^3\vec{r}}{r}.$$

Après intégration sur le volume, vous remplacez ce terme par le potentiel électrique V :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(O) = \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\nabla} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right).$$

Finalement, en prenant le gradient de V , on retombe sur l'équation (93). Ouf ! Le plus difficile est fait. Pour conclure, refaites alors le chemin inverse : partez de l'équation (93), et vérifiez que vous trouvez l'équation (102).

Sources et références

Le problème de la tige m'a été aimablement communiqué par Thierry Charitat [1]. Celui des pétales et de la feuille vient de la référence [4], qui calcule encore d'autres formes. La référence [5] reprend la même méthode pour calculer des champs électrostatiques sur des conducteurs plans de forme variée.

- [1] T. CHARITAT et F. GRANER. About the magnetic field of a finite wire. *European Journal of Physics*, volume 24, 2003, pages 267-270.
- [2] O. D. JEFIMEMKO. *Electricity and Magnetism*. Electret Scientific, Star City, deuxième édition, 1989.
- [3] V. HNIZDO. Comment on 'About the magnetic field of a finite wire'. *European Journal of Physics*, volume 24, 2003, pages L15-L16.
- [4] J. A. MIRANDA. Magnetic Field Calculation for Arbitrarily Shaped Planar Wires. *American Journal of Physics*, volume 68, 2000, pages 254-258.
- [5] J. A. MIRANDA. Biot-Savart-like Law in Electrostatics. *European Journal of Physics*, volume 22, 2001, pages 31-38.

Corrigé 9 Bilan thermal propre (Énoncé à la page 21)

Commentaire. Cet exercice est une contribution à la notion de bilan thermal équilibré, voir page 5. Il reste strictement dans le cadre d'un problème de physique (voir « Notes » pour ce qui sort de ce cadre).

L'intérêt ici est de calculer des ordres de grandeur. Faites donc impérativement les applications numériques, en allant piocher les données dont vous avez besoin. Ainsi, gardez en tête la capacité calorifique de l'eau (ou, si l'on préfère, la définition de la calorie) : $4,18 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (page 236).

► Question 9.1.

Valeurs numériques. Pour une personne sédentaire, assez nourrie, vivant en pays riche et tempéré, il est recommandé de manger environ 10 MJ par jour (table page 288) : quand on parle en kilocalorie, on suggère 2 200 kcal à 2 500 kcal par jour. La consommation augmente avec l'activité : quand vous êtes en train de résoudre un problème de physique, vous consommez environ 20 % de plus, soit 12 MJ par jour. Un sportif ira à 15 MJ, voire plus s'il est professionnel ; en expédition en milieu polaire, on atteindra des 20 MJ à 25 MJ par jour (5 000 kcal, voire plus).

Une autre façon, indépendante, pour évaluer notre consommation, consiste à estimer la quantité d'oxygène qu'on respire. Il est un peu plus difficile de trouver les ordres de grandeur autour de soi. Si l'on prend par exemple vingt litres d'air aspirés par minute, dont 5 % effectivement utilisés pour brûler notre nourriture, cela fait chaque minute un litre de dioxygène, soit $1/22,4 \text{ mol}$ (soit $32/22,4 = 1,4 \text{ g}$). Or la combustion d'hydrocarbure, ramenée à une mole de dioxygène, dégage environ 430 kJ : cela donne donc $430/22,4 = 19 \text{ kJ}$ par minute, soit 1,1 MJ par heure. Pour une période d'activité d'environ seize heures par jour, on trouve donc de l'ordre de 18 MJ, ce qui est le bon ordre de grandeur, certes un peu surévalué.

Chaque jour, on est à peu près identique à ce qu'on était la veille, à un imperceptible vieillissement près : un jour correspond environ à un cycle. Le bilan sur une journée est donc nécessairement à peu près nul : on consomme autant qu'on dépense. Naturellement, il peut y avoir quelques variations d'un jour sur l'autre. Comment pouvez-vous le voir ? En montant sur la balance : la balance est le témoin (impitoyable) de notre bilan quotidien. Si notre bilan d'énergie est positif, on stocke des réserves de graisse ; s'il est négatif, on tire sur nos réserves (voir la question 9.2).

Pour la même raison, votre entropie, qui est une fonction d'état, est donc à peu près la même que la veille.

Pour l'Univers (ou, plus modestement, pour la Terre, dans la mesure où on la considère comme un système isolé), le bilan d'énergie est nul, comme toujours, indépendamment de ce que vous avez pu manger ou boire. En revanche, vous avez

fait augmenter l'entropie de l'Univers. Le seul fait de dégrader 12 MJ d'énergie, d'une forme utilisable vers une forme microscopique, fournie sous forme de chaleur à l'atmosphère dont la température est $T_{\text{amb}} = 300 \text{ K}$, a créé une entropie $12 \cdot 10^6 / 300 = 4 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Cet ordre de grandeur n'est pas très parlant en soi, car on n'a pas l'habitude de manipuler les $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$. On le comparera donc à d'autres exemples. C'est l'objet de la question 9.3.

► Question 9.2.

Valeurs numériques.

Bilan global : Ce que vous consommez, c'est une énergie stockée sous une forme utilisable pour vous. Il s'agit d'énergie chimique, en l'occurrence des liaisons covalentes que vous brûlez de façon extrêmement bien contrôlée, avec un rendement optimal. Avec cela, vous fournissez de la chaleur, pour réguler votre température ; et du travail, c'est-à-dire une activité que vous jugez peut-être utile. Cependant, le bilan global ne s'occupe pas de ces détails : toute l'énergie que vous fournissez finit inéluctablement par se dégrader sous forme inutilisable, en l'occurrence l'élévation de l'énergie interne de l'atmosphère. Autrement dit, quelle que soit votre activité, vos voisins vous perçoivent comme un radiateur.

Savez-vous évaluer quelle est votre puissance ? La question 9.1 y répond : une douzaine de mégajoules par jour, soit de l'ordre de $12 \cdot 10^6 \text{ J} / 86\,400 \text{ s} = 140 \text{ W}$. Donc sept personnes dans une pièce équivalent à un petit radiateur de 1 000 W.

Quelle fraction de toute cette puissance correspond à du travail ? Convertissez les mégajoules en une unité plus parlante. Pensez par exemple à la marche en montagne : l'essentiel de l'effort est consacré à stocker de l'énergie potentielle de pesanteur mgz , donc on peut se faire une bonne intuition. Si je monte une heure à pied (ou vingt minutes à vélo), je monte de 300 m de dénivelée, c'est comme faire l'ascension de la Tour Eiffel. Avec ma masse $m \approx 70 \text{ kg}$, j'acquies donc ainsi une énergie potentielle de pesanteur, $mgz = 70 \text{ kg} \times 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times 300 \text{ m}$, soit 0,2 MJ. Ma consommation journalière, qui est 12 MJ, vaut soixante fois plus ! Si toute ma consommation pouvait être utilisée sous forme de travail mécanique visible, je devrais être capable de monter dans la journée 20 000 m de dénivelée, soit soixante tours Eiffel, ou trois Everest. J'en suis loin. Autrement dit, je fournis bien plus de chaleur que de travail : c'est vrai que je suis essentiellement un radiateur !

Du point de vue de la thermodynamique, un être humain fonctionne comme une machine thermique qui mange pour se chauffer et boit pour se refroidir (voir page 148). Si on mange plus, on consomme plus, et il faut boire plus pour évacuer la chaleur par transpiration, afin de garder constante la température du corps. Ainsi, un effort de 200 W supplémentaire nécessite de boire chaque heure environ un verre d'eau (0,2 litres).

Maigrir de cent grammes : 100 g de graisse stockent une énergie de 3,7 MJ. Un moyen pour s'en souvenir est de se rappeler « 9, 4, 4 » : un gramme de lipide, de

protide, de glucide, apportent respectivement 9 kcal, 4 kcal et 4 kcal ; soit 37 kJ par gramme de graisse, 17 kJ par gramme de protéine ou de sucre. Un simple coup d'œil à l'étiquette d'une bouteille d'huile, ou de tout autre produit alimentaire, permet de vérifier ces valeurs. Cela fait un tiers de votre consommation quotidienne. Autrement dit, si vous voulez maigrir de cent grammes, il vous faut un bilan très déséquilibré : vous devez dépenser approximativement un tiers de plus que ce que vous consommez (voir « **Notes** »). Bon courage. Si, pour dépenser ce surcroît d'énergie, vous choisissez de le gaspiller, par exemple en faisant du sport (plutôt que de réaliser un travail utile ou de vous transporter), au final votre bilan est le même que si vous allumez votre radiateur pendant une heure en laissant la fenêtre grande ouverte !

Hibernation : Inversement, combien de graisse faut-il pour hiberner plusieurs mois ? Là, je manque d'ordre de grandeur précis, d'autant que les humains ne sont pas une espèce qui hiberne. La consommation chute nécessairement, mais il n'y a pas de limite inférieure. En effet, un animal à sang froid consomme vingt à quarante fois moins qu'un animal à sang chaud, supporte de longs jeûnes, et peut hiberner en laissant sa température baisser. Certaines grenouilles descendent en-dessous de 0 °C ; c'est aussi le cas d'autres organismes prévus pour passer l'hiver : graines, œufs d'insectes, racines.

Je propose donc d'imaginer une personne qui dort pendant trois mois. En me basant sur sa respiration, j'évalue que sa consommation est cinq fois plus faible qu'en étant éveillée. Cela donne 2 MJ par jour, ou 180 MJ pour tout l'hiver. Une bonne isolation thermique permettrait peut-être de gagner un facteur 2, ramenant cette valeur à 90 MJ. En ce cas, il lui suffirait d'avoir stocké 25 kg de graisse : cette valeur est fournie sans garantie, mais son ordre de grandeur n'est pas absurde.

En revanche, si on suit ce calcul on se convaincra que, pour dormir cent ans, la Belle au Bois Dormant aurait dû prévoir de stocker dix tonnes de graisse dans ses bourrelets, ce qui aurait ôté un peu de romantisme au conte.

► Question 9.3.

Valeurs numériques. Procédez à quelques comparaisons : 100 km à vélo représentent plusieurs heures de sport. Par rapport à un sédentaire, un sportif mange de l'ordre de 30 % en plus, soit une surconsommation de nourriture de 5 MJ. Cela fait augmenter de $1,7 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ l'entropie de l'Univers.

Pour faire 100 km, une voiture usuelle consomme, disons, huit litres d'essence. La densité de l'essence est plus proche de 0,9 que de 1 : cela fait 7,2 kg environ. On peut assimiler l'énergie chimique stockée par l'essence, donc dégagée par sa combustion, à celle des lipides. En effet, il s'agit dans les deux cas d'hydrocarbures : la seule différence est que les molécules de lipides ont des chaînes carbonées plus longues, et à leur extrémité une petite tête. On se basera donc sur 37 MJ par kilogramme, ce qui est bien l'ordre de grandeur de la « Tonne d'Équivalent Pétrole »

(voir table page 288). Cela représente 270 MJ pour faire 100 km, et $9 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ d'entropie créée. C'est cinquante fois plus que pour le vélo !

100 km de vélo, 30 km de marche à pied, et 2 km de voiture, sont donc à peu près équivalents, en termes de consommation d'énergie et de création d'entropie. Dans les compétitions d'économie d'énergie, des prototypes roulant à $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ arrivent à parcourir plus de 500 km avec un seul litre d'essence : c'est une performance comparable à celle des êtres vivants.

Calculons quelques ordres de grandeur. Un être humain dégage environ 140 W (voir la question précédente 9.2). S'il se met à bronzer au Soleil, il offre environ 1 m^2 de peau aux rayons solaires et reçoit donc environ 1 400 W (table page 288) ; un peu moins en fait, à cause de l'absorption par l'atmosphère, mais si le Soleil est assez haut dans le ciel cette absorption est faible et l'ordre de grandeur est peu modifié (voir équations (129), (134) et page 141). Puisque nous réfléchissons mal, nous absorbons une grande part de cette puissance qui nous arrive dessus (voir pages 133 et 201). Se chauffer au Soleil nous apporte donc une puissance importante, et nous avons ainsi moins besoin de manger pour maintenir constante notre température.

Prenons maintenant une pièce d'appartement avec sept personnes, soit 1 000 W de chaleur humaine. C'est comparable à la puissance des radiateurs installés, qui doit être probablement à peine supérieure, peut-être 1 000 W à 2 000 W quel que soit leur type ; sauf s'il s'agit d'une pompe à chaleur, qui consomme notablement moins. Pour une pièce de cette taille, l'éclairage électrique installé est de l'ordre de 100 W à 300 W, eux aussi intégralement utilisés pour chauffer la pièce, malheureusement surtout le plafond. Pour le bilan de ce qu'on reçoit par la fenêtre du rayonnement du Soleil et de l'atmosphère, voir exercice 12 : une fenêtre de 4 m^2 orientée au Sud reçoit du Soleil plusieurs kilowatts (question 12.3) ; une fenêtre orientée Nord ne subit que les échanges avec l'atmosphère (question 12.2).

Quand un litre d'eau passe de 20°C à 100°C , il stocke

$$80 \text{ K} \times 1 \text{ kg} \times 4,18 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = 330 \text{ kJ},$$

soit 0,3 MJ. C'est donc une quantité plus faible que notre consommation quotidienne, mais pas complètement ridicule : en hiver, l'apport énergétique d'une boisson chaude, même du thé qui n'a pas de valeur nutritive, n'est pas négligeable.

Quand vous prenez une casserole et que vous y chauffez un litre d'eau froide, quelle énergie consommez-vous réellement ? Si vous la chauffez avec une cuisinière au gaz, et que vous avez pensé aux économies d'énergie (mettre un couvercle, régler la flamme pour qu'elle ne dépasse pas de la casserole), vous consommez à peine plus que ces 330 kJ, et l'augmentation d'entropie de l'Univers est de l'ordre de $10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$. En revanche, si vous utilisez l'électricité, elle provient essentiellement de centrales thermiques ou nucléaires (en France, elles sont surtout nucléaires), dont le rendement n'atteint guère que 50 % : vous consommez donc plutôt 600 kJ et contribuez pour $2 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ à l'augmentation d'entropie.

Qu'est-ce que vous consommez quand vous prenez un bain chaud ? Le raisonnement est le même, avec cent litres d'eau qu'on fait passer de 20 °C à 45 °C, on trouve $25 \text{ K} \times 100 \text{ kg} \times 4,18 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = 10^7 \text{ J}$, soit 10 MJ (un peu plus en réalité, car même une chaudière bien réglée a des pertes de l'ordre de 15 % : les gaz de combustion sont chauds, et donc partent en emportant de l'énergie). En prenant un bain, vous consommez donc autant d'énergie, et créez autant d'entropie, que durant toute votre activité biologique de la journée !

Comparez la consommation globale de la France ($10^9 \text{ tep} \cdot \text{an}^{-1}$) avec la consommation alimentaire. Pour cela, utilisez le tableau 7 de la page 288, et rapportez tout dans la même unité, par exemple en joules par personne et par an. On trouve qu'en moyenne, chaque année, vous mangez $4 \cdot 10^9 \text{ J}$ et vous consommez $8 \cdot 10^{11} \text{ J}$, soit 200 fois plus !

En conclusion, vous pouvez retenir que nous mangeons une dizaine de mégajoules par jour. Ce que nous demandons à nos muscles est bien plus petit, ce que nous demandons à nos machines est bien plus grand.

Notes. Ce qui précède est de la physique. Attention, quand on passe aux applications pratiques, il faut tenir compte de bien d'autres considérations, en particulier :

- *Politiques* : Toute politique de l'énergie doit tenir compte de la thermodynamique élémentaire : par exemple les fuites thermiques dans nos maisons, les rendements de nos voitures, ou la consommation d'énergie et la création d'entropie de ce qu'on produit, comparé à ce qu'on recycle. Quand on choisit d'utiliser une machine plutôt que ses muscles, quand on choisit de consacrer un champ agricole à la production de carburant pour les voitures plutôt que pour les êtres humains, c'est un choix politique. Les décisions impliquent cependant d'autres facteurs que la thermodynamique ; citons par exemple l'environnement, et le problème du stockage des déchets nucléaires.
- *Biologiques* : Certes, la thermodynamique joue un rôle essentiel, puisque entre mourir de faim ou être repu la différence est une question d'apport énergétique. L'augmentation du poids moyen des habitants des pays riches est naturellement liée à une inégalité croissante dans la répartition de nourriture, plutôt qu'à une épidémie ou une mutation génétique.

En revanche, bien se porter, c'est plus nuancé. Cela fait largement intervenir l'équilibre alimentaire, le métabolisme, la diététique, et d'autres considérations biologiques tout aussi compliquées, qui ne sont pas du ressort de la physique. Par ailleurs, notre perception ne se réduit pas non plus à la simple thermodynamique. Ainsi, la sensation de chaleur fournie par le café ou l'alcool n'a rien à voir avec leur apport énergétique réel, qui est quasi-nul pour le petit café noir, voire négatif pour l'alcool.

- *Pratiques* : dans un pays d'ensoleillement et de densité de population comme ceux de la France, l'énergie solaire reçue représente environ 10^{11} J par jour et par personne. C'est beaucoup : c'est comparable à notre consommation totale (dans les pays tropicaux moins denses et moins consommateurs, le solaire reçu dépasse

même largement la consommation). Le problème pratique est de capter cette ressource : comment couvrir le sol de capteurs ? En un certain sens, c'est ce que réalise l'agriculture depuis des millénaires, puisque les plantes sont des capteurs solaires, et fournissent en énergie toute la chaîne écologique.

Corrigé 10 Se faire un œuf en soixante-cinq secondes ?

(Énoncé à la page 22)

Commentaire. Il s'agit d'un problème de thermodynamique. L'énoncé appelle à se concentrer sur l'essentiel. Un point à noter : l'énoncé donne les valeurs à 30 % près, donc il suffira dans la suite de travailler avec une précision de 30 %, sans se noyer dans les détails.

► Question 10.1.

Première approche. On peut essayer de partir sans idée préconçue. On constate que la partie de l'œuf qui est devenue dure est :

- au bout de 3-4 minutes : l'extérieur du blanc, qui est près de la coquille ;
- au bout de 5-7 minutes : tout le blanc ;
- au bout de 10-13 minutes : tout le blanc et le jaune.

Appelons T_0 la température initiale de l'œuf. On le plonge dans l'eau bouillante et sa température augmente. Il est raisonnable de supposer qu'une région de l'œuf durcit lorsqu'elle atteint une certaine température T_d . On ne sait pas *a priori* si T_d a la même valeur pour le blanc et le jaune, mais il suffit de se concentrer sur le blanc seul. Le blanc durcit progressivement, et non tout d'un coup : on peut donc affirmer que *la température n'est pas homogène* à l'intérieur de l'œuf.

Notations. Quelles sont les quantités physiques importantes, et quelles notations prendre ? On va définir un champ de température à l'intérieur de l'œuf : $T(\vec{r}, t)$. Comme la gravité ne semble pas jouer ici, et que les temps de cuisson sont probablement presque les mêmes pour un œuf et pour une sphère, on ne perd pas grand-chose en supposant que le problème est à symétrie sphérique. On mesure les dimensions de l'œuf : 5,5 cm pour le grand axe, 4 cm pour le petit axe, ce qui correspond grossièrement à une sphère de rayon $R = 2,3$ cm. On écrira donc $T = T(r, t)$, où $r < R$ est la distance au centre de l'œuf.

Description quantitative. Peut-on chercher à tracer l'allure de $T(r)$ à différents instants ? On connaît déjà T_0 , qui vaut 4 °C si l'œuf vient du réfrigérateur, et 20 °C sinon. La température T_e à l'extérieur de l'œuf, c'est-à-dire de l'eau bouillante, reste à peu près toujours égale à 100 °C. Il est plus difficile d'évaluer T_d ; on peut en tous cas dire qu'elle est bien supérieure à 37 °C, sinon on cuirait l'œuf au creux de notre

main ; et bien inférieure à 100 °C, sinon l'eau bouillante serait insuffisante pour le cuire. Étant donnée la précision cherchée ici, pour fixer les idées et tracer les diagrammes on peut prendre n'importe quelle valeur, disons entre 50 °C et 80 °C : cela ne changera pas beaucoup le raisonnement qui suit ni les résultats qu'on trouvera. Je suggère donc de prendre 60 °C ou 70 °C, qui est proche de la valeur réelle (voir « Notes »).

Des mesures qui sont données, on déduit que la limite de durcissement, donc la profondeur $x = R - r$ de la zone telle que $T(r) \geq T_d$, est : $x \approx 0,8$ cm au bout de 3-4 minutes, $x \approx 1,5$ cm au bout de 5-7 minutes, x proche de 2,3 cm au bout de 10-13 minutes. Cela permet déjà de tracer l'allure de $T(r)$ à différents moments (figure 54). Pour discuter si $T(r)$ est une fonction continue ou discontinue, il faut une analyse plus détaillée, qui fait l'objet de la question suivante.

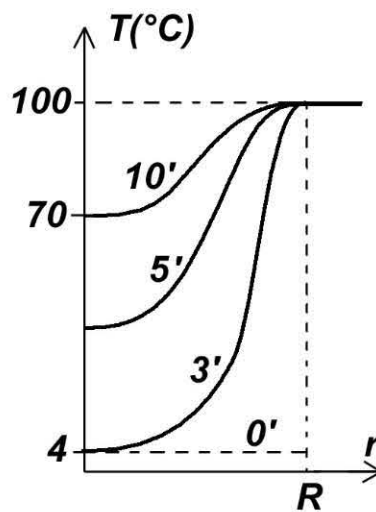


Figure 54 Température en fonction de la distance au centre de l'œuf.

Il s'agit d'un tracé à différents instants : au début, au bout de 3 min, 5 min, 10 min.

► Question 10.2.

Analyse qualitative. Pour comprendre quelle est la propriété de l'œuf qui détermine le temps de cuisson, peut-on analyser par quel mécanisme la température s'élève, c'est-à-dire ce qui permet les échanges de chaleur entre l'eau et le centre de l'œuf ? On connaît plusieurs mécanismes possibles, basés sur la conduction/diffusion, la convection ou le rayonnement (voir page 6). La question n'est pas de les traiter tous, mais plutôt de trouver quel est celui qui domine les autres.

L'eau permet de bons échanges de chaleur par contact, et le rayonnement ne joue certainement pas un rôle aussi important que la conduction/diffusion et la convection. La casserole d'eau bouillante est l'exemple type qu'on cite pour présenter la convection. Grâce à la convection, la température de l'eau est à peu près homogène.

En revanche, à l'intérieur de l'œuf, que se passe-t-il ? C'est plus difficile de savoir, car on ne le voit pas. Étant donnée la viscosité du blanc d'œuf liquide, notre intuition a du mal à imaginer qu'il puisse y exister d'intenses courants de convec-

tion (quand le blanc d'œuf est solide, la question de la convection ne se pose plus, bien sûr). Mais on dispose d'un meilleur argument pour déduire que la convection n'a pas de rôle important. C'est l'observation faite plus haut que la température n'est pas homogène, et que le blanc d'œuf durcit d'abord au voisinage de la coquille, et puis progressivement à l'intérieur. En conclusion, dans l'œuf la chaleur diffuse progressivement. On peut donc déjà anticiper que la propriété de l'œuf qu'on mesure, c'est son *coefficient de diffusion*.

Simplifications. Peut-on alors passer à la mise en équation de la diffusion de la chaleur ? Pour cela, on va être obligé au préalable de négliger toute une série de facteurs. Citons tout d'abord l'effet de la coquille et des fines membranes qui entourent le blanc comme le jaune. Elles ne pourraient jouer un rôle que si leur conductivité thermique était bien plus basse que celle du blanc ou du jaune, autrement dit si ces membranes étaient d'excellents isolants thermiques, supportant une importante discontinuité de température ; ce ne serait guère vraisemblable. On n'a donc pas besoin de les considérer ici.

Une autre quantité à considérer, c'est la chaleur latente du durcissement. Pour effectuer un changement d'état, il faut *a priori* fournir une certaine quantité de chaleur, dont on doit tenir compte dans le bilan énergétique, mais qui ne contribue pas à élever la température. Dans le cas de la fusion ou de l'évaporation de l'eau, cette chaleur latente est bien plus élevée que la quantité de chaleur à fournir pour élever, disons, d'un degré la température de l'eau (voir page 286). Dans le cas du durcissement de l'œuf, cette chaleur latente est difficile à évaluer. Par souci de simplicité, nous pouvons choisir de ne pas en tenir compte : mais il faudra vérifier *a posteriori* la validité de l'étude.

Ces deux hypothèses doivent être suffisantes. Pour mémoire, rappelons qu'on a déjà aussi négligé l'effet de la forme de l'œuf, de la convection dans l'œuf, des inhomogénéités de température de l'eau, et de la différence de T_d entre le jaune et le blanc.

Analyse dimensionnelle. Avant de se lancer dans les équations, peut-on essayer de deviner ce qu'on va trouver ? Pour cela, l'outil est l'analyse dimensionnelle. Physiquement, étudier la diffusion revient à écrire un bilan d'énergie global, pour l'ensemble de l'œuf. Un volume V passe de T_0 à T_d lorsque son énergie interne a varié de $\rho c V (T_d - T_0)$, où ρ est la masse volumique de l'œuf, c est sa capacité calorifique (pour un liquide ou un solide, il n'y a pas vraiment de différence entre la capacité calorifique à pression ou à volume constant). Pour cela il faut fournir pendant un temps t une puissance : c'est la surface S multipliée par le flux de chaleur, qui vaut $\kappa \nabla T$, où κ est la conductivité thermique de l'œuf, et ∇T vaut de l'ordre de $(T_e - T_0)/R$.

On en déduit approximativement :

$$\rho c V (T_d - T_0) \approx S \kappa \frac{T_e - T_0}{R} t. \quad (103)$$

On voit immédiatement apparaître le *coefficient de diffusion thermique de l'œuf* :

$$D = \frac{\kappa}{\rho c}, \quad (104)$$

qui s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. On voit aussi apparaître le rapport surface/volume S/V de l'œuf, ce qui est normal : plus ce rapport est grand, meilleurs sont les échanges de chaleur, voir « **Notes** » et page 130. Pour la sphère, on a $S/V = 3/R$; notez qu'on aurait $2/R$ ou $1/R$ si l'on avait considéré le problème à deux ou à une dimensions, soit respectivement un cylindre de diamètre $2R$ ou deux plaques planes distantes de $2R$.

L'équation (103) se simplifie donc, et le temps que met le centre de l'œuf à atteindre la température T_d est de l'ordre de :

$$t \approx \frac{R^2}{3D} \frac{T_d - T_0}{T_e - T_0}. \quad (105)$$

Pour l'application numérique on prend $T_d - T_0 \approx 70^\circ\text{C}$, $T_e - T_0 \approx 96^\circ\text{C}$ et l'on obtient :

$$t \approx 0,25 \frac{R^2}{D}.$$

Vérifications. À ce stade, nous pouvons déjà vérifier si nous allons dans la bonne direction. Dt est une longueur au carré : quelle est la signification de cette longueur ? Dimensionnellement, c'est la profondeur $x = R - r$ sur laquelle l'influence de la température extérieure se fait sentir : x^2 croît comme Dt , et l'on voit qu'ici on peut presque estimer le préfacteur :

$$x^2 \approx 4Dt.$$

On peut tracer les valeurs expérimentales de x^2 en fonction de t (figure 55). Compte tenu des approximations faites, il ne s'agit pas de regarder si une droite modélise bien ou mal les points expérimentaux. Il s'agit plutôt de regarder quelles sont les pentes compatibles avec les données : on trouve de l'ordre de $0,3$ à $0,4 \text{ cm}^2 \cdot \text{min}^{-1}$. Il faut convertir cela en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ sans se tromper : pour cela on multiplie par 10^{-4} et on divise par 60, soit une pente de l'ordre de $6 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \pm 15\%$. Remarquez que la précision sur la pente est meilleure que la précision individuelle de chaque mesure : c'est tout l'intérêt d'avoir plusieurs mesures. On a ainsi réalisé une mesure du coefficient de diffusion thermique de l'œuf :

$$D \approx 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \pm 15\%.$$

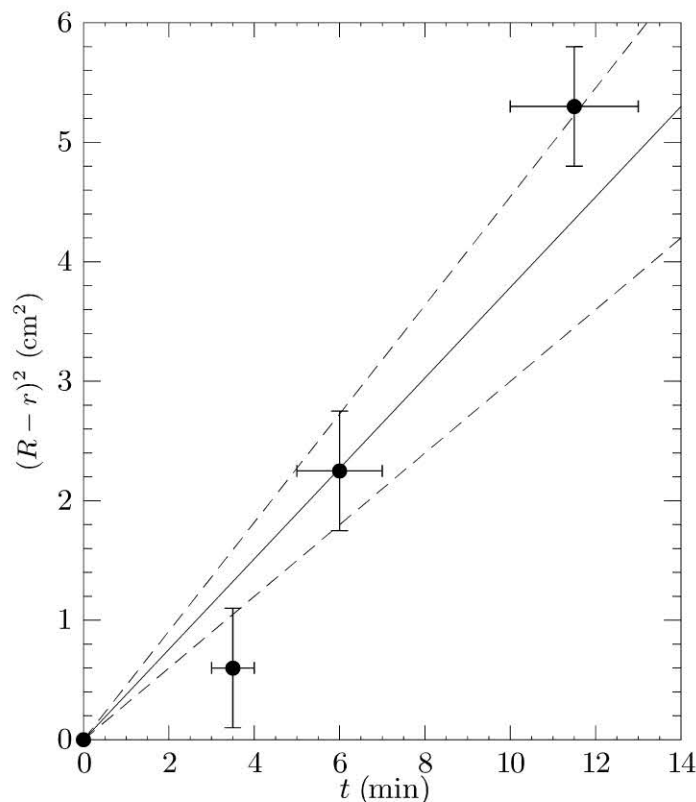


Figure 55 Profondeur cuite, en fonction du temps.

À quoi pouvez-vous comparer cette valeur, pour vérifier ? L'œuf étant essentiellement constitué d'eau, on peut comparer D à la valeur de l'eau, pour laquelle on connaît κ , ρ et c (page 286). Et avec l'équation (104), on trouve justement :

$$\frac{\kappa}{\rho c} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

Cet accord signifie probablement qu'on a bien atteint l'essentiel de la physique, et que l'effet des détails négligés n'est que de quelques pourcents.

Mise en équations. Pouvez-vous aller plus loin en écrivant une équation exacte ? Elle n'est pas difficile à écrire. En effet, le bilan d'énergie ci-dessus (équation (103)) doit en fait s'écrire sous forme locale :

$$\frac{du}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_Q,$$

où la variation de la densité d'énergie interne est $du = \rho c dT$ et le flux de chaleur $\vec{J}_Q = -\kappa \vec{\nabla} T$, d'où la classique équation de Fourier :

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = D \nabla^2 T. \quad (106)$$

Ici les conditions aux limites pour le champ de température au sein de l'œuf sont : $T(R,t) = T_e = 100^\circ\text{C}$ et $T(r,0) = T_0 = 4^\circ\text{C}$.

Résolution. Pouvez-vous résoudre l'équation (106) ? Le champ de température n'a aucune raison d'être stationnaire, et cette équation n'admet pas de simplification évidente. Le laplacien en sphérique donne un terme en $\partial^2 T / \partial r^2 + (2/r) \partial T / \partial r$; on peut alors tout exprimer en fonction de la variable sans dimension x^2/Dt et passer à une résolution numérique.

Pour essayer un traitement analytique, on peut à la rigueur se placer dans un problème à une dimension, donc en ne gardant que $\partial^2 T / \partial r^2$; par contre, comme on l'a vu dans l'analyse dimensionnelle ci-dessus, il faut alors au moins garder le facteur 3 caractéristique du rapport surface sur volume d'une sphère, ce qu'on peut faire en remplaçant D par $3D$.

Ces deux méthodes sont discutées dans l'article [1]. On constate qu'elles ne diffèrent pas beaucoup. La solution exacte et celle qu'on a trouvée par un raisonnement dimensionnel ne diffèrent que de 20 %, ce qui explique la qualité de notre mesure de D .

► Question 10.3.

Valeur numérique. Quelle est la meilleure méthode pour répondre facilement à cette question ? Ici, c'est le bilan d'énergie global (équation (105)). Il indique que, si $T_0 = 20^\circ\text{C}$:

$$t \approx 0,2 \frac{R^2}{D}.$$

donc le temps de cuisson devient environ 20 % plus court.

Notes.

- On trouvera dans l'article [1] quelques données intéressantes sur l'œuf. Ainsi, le blanc contient 90 % d'eau et son coefficient de diffusion est en fait 1,5 fois celui de l'eau. Le jaune, lui, contient 50 % d'eau et son coefficient de diffusion est 1,1 fois celui de l'eau.
- L'œuf durcit quand les protéines coagulent. C'est une transition de phase qui coûte beaucoup moins d'énergie que la fusion ou que l'évaporation de l'eau. Ainsi, la quantité de chaleur qu'il faut fournir à la transition (chaleur latente) est de $1,7 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$, équivalente à ce qu'il faut pour élever la température de l'œuf de $0,3^\circ\text{C}$. Il était donc correct de la négliger.
- Enfin, le blanc durcit à 62°C , mais le jaune à 68°C . Cette différence permet aux gourmets de conserver un jaune liquide tout en durcissant le blanc et en tuant les salmonelles, qui meurent par exemple lors d'un chauffage à 59°C pendant sept ou huit minutes.

- Remarquez le rôle du rapport surface/volume de l'œuf (voir pages 120 et 122). Un petit œuf cuit plus vite qu'un gros. De même, si l'on coupe en deux une pomme de terre, elle cuit plus vite. En règle générale, les petits objets échangent mieux la chaleur que les gros, voir page 130.

Ouvertures. Vous pouvez poser d'autres problèmes autour de cet œuf à la coque, en particulier :

- Comment faire si vous voulez manger non pas un, mais 2 œufs à la coque ? Le polytechnicien de la fable proposerait, dit-on, de cuire d'abord le premier œuf, puis d'éteindre le gaz, de jeter l'eau dans l'évier, et de raccrocher la casserole, « pour se ramener au problème précédent qu'on sait résoudre ». En pratique, on a plutôt l'habitude de cuire les deux œufs à la coque en même temps, et de les sortir de l'eau en même temps. D'où une grave question : pendant qu'on déguste le premier œuf, est-ce que le deuxième continue à durcir ? C'est crucial, parce que si le premier est à point, cela veut dire que le deuxième sera trop cuit... Faites l'expérience, faites l'analyse théorique, et comparez !
- Essayez de calculer le temps de cuisson en fonction de l'altitude. Par définition, la température d'ébullition T_e est celle où la pression de vapeur saturante $P_{\text{sat}}(T)$ vaut exactement $P_{\text{sat}}(T_e) = P_{\text{atm}}$. Si la pression atmosphérique diminue, la température d'ébullition diminue aussi : T_e baisse de 5 °C quand P_{atm} baisse de 17 %. Il vous faut donc calculer comment la pression varie avec l'altitude : faites-le tout d'abord en supposant que l'atmosphère est isotherme ; puis en tenant compte de la variation de la température avec l'altitude, qui est de -6°C par kilomètre.
- Il existe des situations physiques où la diffusion de la chaleur doit tenir compte d'une importante chaleur latente de changement d'état. C'est le cas de la terre gelée en permanence : le « permafrost » de Sibérie ou du Canada. En effet, même si l'atmosphère a une température supérieure à 0 °C, l'énergie qu'elle peut fournir ne suffit à décongeler la terre que sur une profondeur limitée. Analysez l'effet de cette chaleur latente sur la profondeur de pénétration.
- Estimez comment varie, en fonction de la profondeur et du temps, la température $T(r, t)$ d'un aliment qu'on fait bouillir, griller, frire, rôtir, cuire sous la cendre ou chauffer au four à micro-ondes. Comparez ces différents modes de cuisson. En quoi le four à micro-ondes se distingue-t-il de tous les autres modes de cuisson ? Pourquoi les frites se font-elles à l'huile bouillante et non à l'eau bouillante ? Pourquoi, quand on fait bouillir, chauffe-t-on toujours par en-dessous ? Pourquoi, quand on fait griller, peut-on chauffer au choix par en-dessous (grillades), par le côté (grille-pain), ou par en-dessus (gratin) ?

Sources et références

L'article [1] discute les ordres de grandeur, diverses simplifications et les erreurs qu'elles induisent. Il apparaît régulièrement sur internet des discussions sur les cuissons des oeufs.

- [1] P. ROURA, J. FORT, et J. SAURINA. How Long does it Take to Boil an Egg ? A Simple Approach to the Energy Transfer Equation. *European Journal of Physics*, volume 21, 2000, pages 95-100.

Corrigé 11 Les tas d'air, c'est isolant (Énoncé à la page 23)

Première approche. Vous devez analyser les échanges de chaleur entre un liquide et l'atmosphère à travers deux parois concentriques. Pour cela, vous devez considérer un par un les trois mécanismes (voir page 6) : convection, conduction, rayonnement.

Notations. Une fois n'est pas coutume : pour faciliter la discussion, je fixe les notations dès le début. L'énoncé en a déjà fourni plusieurs : $T_{\text{int}}(t)$, T_0 , T_{amb} . Il nous faut maintenant préciser les dimensions : hauteur h , rayons R_1 et R_2 des deux parois concentriques, aire A des parois, volume intérieur V (voir la figure 56).

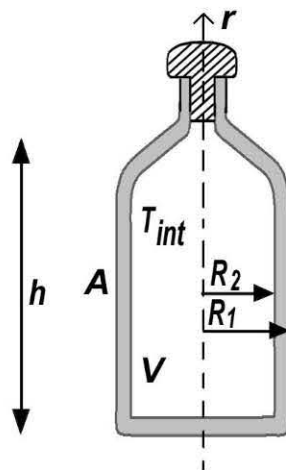


Figure 56 Schéma de la bouteille thermos, et notations.
En gris, le vide partiel entre les parois extérieure (R_1) et intérieure (R_2).

► Question 11.1.

Analyse qualitative. Détaillons l'ensemble des éléments de la bouteille thermos, de l'intérieur vers l'extérieur (voir la figure 56) :

- L'eau contenue dans la bouteille thermos : au sein de l'eau, la convection domine. Son effet est lié à la hauteur d'eau, donc à la hauteur h de la bouteille.
- Au sein de la paroi intérieure : il s'agit de conduction, liée à l'aire A de la paroi et à son épaisseur.
- L'espace entre les deux parois : *a priori*, on peut penser à la conduction et la convection, liées à la distance $R_1 - R_2$ entre les parois et à A . Mais elles sont toutes deux liées à la densité de l'air. D'où l'intérêt de réaliser un vide partiel : elles

deviennent ainsi négligeables devant le rayonnement (voir la figure 57). Ce rayonnement est le mécanisme dominant. On ne peut jamais le supprimer tout à fait, comme on le discutera plus en détail ci-dessous. Il est lié à A .

- La paroi extérieure. Au sein de la paroi, conduction liée à l'épaisseur de la paroi et à A . Transmission de la paroi à l'atmosphère : conduction et convection, liées à A .
- Il y a toujours un inévitable « pont thermique » le long du goulot de la bouteille, et un autre sur le bord du bouchon : ils créent une conduction directe entre l'intérieur et l'extérieur de la bouteille. Ils sont liés à l'épaisseur du matériau utilisé.

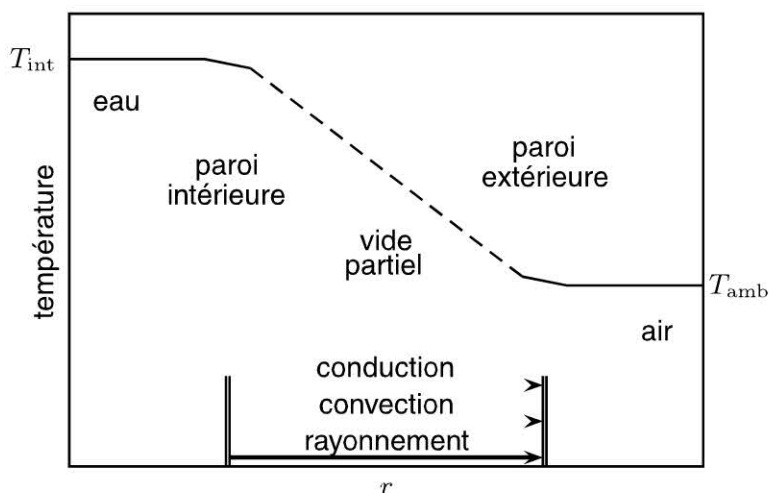


Figure 57 Allure de la température en fonction de la distance au centre de la bouteille. Les unités sont arbitraires. Le rayonnement (flèche pleine) domine la conduction et la convection (flèches pointillées).

Quel est l'intérêt du plastique, quel est l'intérêt du métal ? Le plastique diminue efficacement la conduction, c'est un bien meilleur isolant thermique que le métal. Alors, pouvez-vous expliquer pourquoi la bouteille en métal est plus efficace (voir la figure 11) ?

Puisque le plastique est meilleur contre la conduction (et qu'aucun des deux ne permet de convection, puisqu'ils sont solides), la réponse doit résider dans le rayonnement. De quel rayonnement s'agit-il ? À température ambiante, les échanges se font essentiellement par du rayonnement électromagnétique d'une longueur d'onde de quelques dizaines de micromètres (voir page 287). C'est donc de l'infrarouge lointain.

Dans ce domaine, le plastique absorbe bien presque tout le rayonnement incident. C'est donc également un bon émetteur. Chaque unité de surface réémet sous forme de rayonnement isotherme une puissance dont l'ordre de grandeur est $\eta \sigma_S T^4$. Ici, T est sa propre température, σ_S la constante de Stefan (voir page 288), et η doit être un nombre sans dimension compris entre 0 et 1. Si le plastique absorbe et émet bien l'infrarouge, à peu près comme un corps gris, η est proche de 1.

En revanche, le métal est brillant, dans l'infrarouge autant que dans le visible. Cela veut dire qu'il réfléchit la majeure partie du rayonnement incident, et n'en absorbe qu'une petite fraction : $\eta < 1$. Il est donc mal thermalisé avec le rayonnement électromagnétique. En émission, il émet aussi relativement peu, de l'ordre de $\eta\sigma_S T^4$ watts par unité de surface. C'est cohérent : en régime permanent, deux parois face à face à la même température doivent absorber autant qu'elles émettent.

Le métal diminue donc significativement les échanges par rayonnement. C'est là tout son intérêt. Visiblement (voir la figure 11), cela lui suffit à battre nettement le plastique, pourtant meilleur isolant contre la conduction. C'est donc que le rayonnement est le mécanisme d'échange essentiel entre l'intérieur et l'extérieur de la bouteille thermos (voir figure 57).

► Question 11.2.

Simplifications. Cela va guider toutes nos approximations. On va donc supposer que l'essentiel de la chute de température, et donc de l'efficacité de la thermos, se fait dans l'espace entre les deux parois (voir la figure 57). C'est cohérent : en effet, c'est bien cette double paroi qui distingue la bouteille thermos d'une gourde normale. On néglige donc (voir « **Ouvertures** ») :

- La conduction à travers le bouchon.
- Le gradient de température résiduel au sein du liquide. En effet, la convection homogénéise efficacement la température de l'eau. C'est cela qui nous a d'ailleurs permis de décrire le liquide par un seul nombre, T_{int} (voir les figures 56 et 57).
- La chute de température au sein même d'une paroi : c'est mieux justifié si la paroi est en métal, bon conducteur thermique, que si elle est en plastique, bon isolant.

► Question 11.3.

Mise en équations. La capacité calorifique de l'eau est $c_V = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ par unité de masse (voir page 286), soit $\rho c_V V$ pour un volume V . Compte tenu des approximations ci-dessus, le bilan d'énergie pendant un temps dt s'écrit :

$$\rho c_V V dT_{\text{int}} = \eta \sigma_S A (T_{\text{amb}}^4 - T_{\text{int}}^4) dt. \quad (107)$$

Vérifications.

- Homogénéité :
le membre de gauche est en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \times \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times \text{m}^3 \times \text{K} = \text{J}$,
le membre de droite en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \times \text{m}^2 \times \text{K}^4 \times \text{s} = \text{J}$,
c'est donc bien un bilan d'énergie.
- Le signe est correct : lorsque $T_{\text{amb}} < T_{\text{int}}$, la température du liquide diminue ($dT_{\text{int}}/dt < 0$).

- Enfin, le comportement est correct : $|dT_{\text{int}}/dt|$ diminue lorsque la surface d'échange A diminue ; lorsque l'inertie thermique $\rho c_V V$ augmente ; ou lorsque T_{int} se rapproche de T_{amb} . Notez que l'équilibre $T_{\text{int}} = T_{\text{amb}}$ finit par s'établir grâce au dernier terme de l'équation (107) : il ne faut pas oublier ce terme $-\eta\sigma_S A T_{\text{int}}^4$ qui rappelle que l'environnement rayonne de la puissance de l'extérieur vers l'intérieur, voir équations (116) et (121).

Résolution. L'équation (107) est à variables séparables :

$$\frac{dT_{\text{int}}}{T_{\text{amb}}^4 - T_{\text{int}}^4} = \frac{\eta\sigma_S A}{\rho c_V V} dt. \quad (108)$$

Elle peut s'intégrer analytiquement, par exemple en décomposant le membre de gauche en fraction simples. Cependant, on peut procéder de façon plus simple. On peut comprendre physiquement l'effet des différents paramètres, il suffit pour ça d'un peu d'approximations :

- V/A est un paramètre qui est une longueur. Il est d'ordre $R_2/2$ (pour un cylindre), ou encore $V^{1/3}$.
- On peut utiliser une approximation linéaire, si $(T_{\text{amb}} - T_{\text{int}}) \ll T_{\text{amb}}$ (voir équations (117) et (118)) :

$$T_{\text{amb}}^4 - T_{\text{int}}^4 = T_{\text{amb}}^4 \left(1 - \frac{T_{\text{int}}^4}{T_{\text{amb}}^4}\right) \approx 4T_{\text{amb}}^3 (T_{\text{amb}} - T_{\text{int}}).$$

Est-elle justifiée ? Elle n'est pas mauvaise. En effet, à 95 °C, le membre de droite n'est que 25 % plus bas que le membre de gauche ; et l'écart diminue avec le temps. À 4 °C, c'est encore meilleur : il n'y a que 10 % d'écart.

Moyennant cette approximation linéaire, l'équation (108) devient :

$$\frac{dT_{\text{int}}}{T_{\text{amb}} - T_{\text{int}}} = \frac{dt}{\tau}, \quad (109)$$

où l'on a défini la notation τ , qui est un temps caractéristique, par :

$$\tau = \frac{\rho c_V R_2}{8\eta T_{\text{amb}}^3 \sigma_S}. \quad (110)$$

L'équation (109) s'intègre en :

$$T_{\text{int}}(t) = T_{\text{amb}} + [T_{\text{int}}(0) - T_{\text{amb}}] e^{-t/\tau}. \quad (11)$$

Vérifications. Vérifiez l'équation (111) :

- Est-ce homogène ? D'après l'équation (110), τ s'exprime en $(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \times \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times \text{m}) / (\text{K}^3 \times \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}) = \text{s}$, c'est bien un temps.
- Les signes ont l'air corrects : on a bien une relaxation exponentielle vers la température ambiante.
- Le comportement est correct : τ augmente, c'est-à-dire que la thermos est meilleure, si R_2 augmente ou η diminue. Il vaut donc mieux une thermos en métal, et la plus grande possible. On voit aussi que la température initiale de l'eau ne joue pas, au moins dans cette approximation linéaire ; la thermos est donc efficace autant de temps pour les boissons froides que pour les chaudes (voir cependant « Notes »). Tout ceci est qualitativement cohérent avec la figure 11.

► Question 11.4.

Valeurs numériques. De l'équation (110), on tire l'expression de τ en secondes ou en heures, R_2 étant exprimé en mètres ou en centimètres :

$$\begin{aligned}\tau[\text{s}] &= \frac{10^3 \times 4,18 \cdot 10^3}{8 \times (300)^3 \times 5,7 \cdot 10^{-8}} \frac{R_2}{\eta} = 3,2 \cdot 10^5 \frac{R_2[\text{m}]}{\eta}, \\ \tau[\text{h}] &= 0,9 \frac{R_2[\text{cm}]}{\eta}.\end{aligned}\quad (112)$$

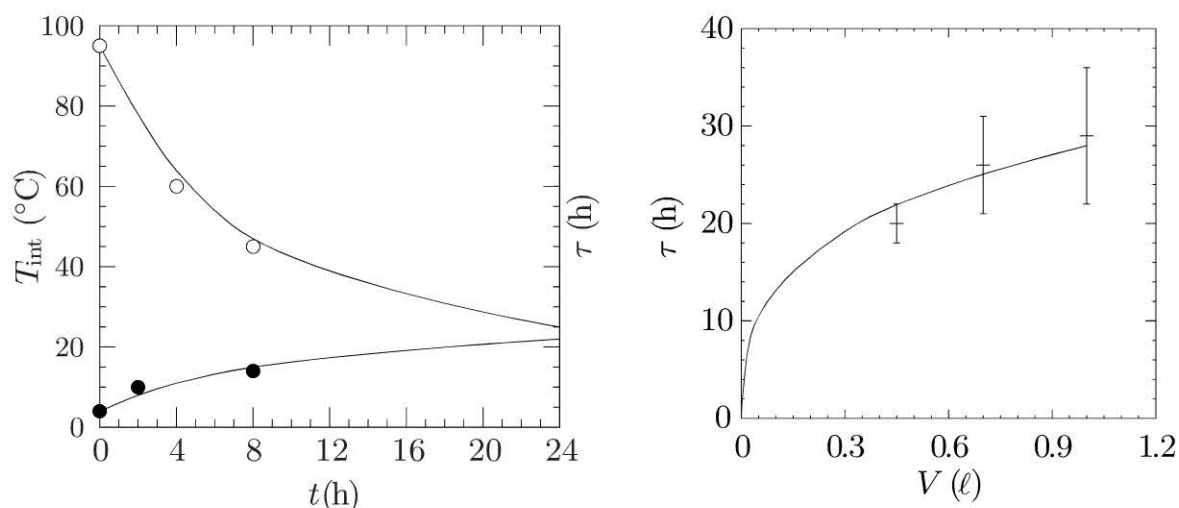
Pouvez-vous aller plus loin, et comparer quantitativement l'équation (111) avec les données de la figure 11 ?

Comme on connaît la température initiale, l'équation (111) permet un ajustement des données avec un seul paramètre libre. Pour la bouteille de plastique, l'ajustement est excellent sur l'essai à chaud ($\tau = 6 \text{ h}$) comme sur l'essai à froid ($\tau = 8 \text{ h}$). On peut même les ajuster simultanément de façon assez correcte avec le même $\tau = 7 \text{ h}$ (voir la figure 58(a)). Ce temps est tout à fait compatible avec l'équation (112), pour une bouteille de plastique ($\eta \approx 1$) cylindrique de 8 cm de rayon.

D'après la figure 11 et l'équation (107), par exemple son membre de gauche, l'ordre de grandeur de la puissance \mathcal{P} perdue par rayonnement lorsqu'on a mis de l'eau froide est :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \rho c_V V \frac{\delta T_{\text{int}}}{\delta t} \\ &= 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 4,18 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times 10^{-3} \text{ m}^3 \times \frac{5 \text{ K}}{4 \text{ h}} \\ &= 5 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{h}^{-1} = 1,5 \text{ W}.\end{aligned}\quad (113)$$

Pour l'essai avec de l'eau chaude, 40 K en 4 h, on trouve 12 W de pertes.



(a) Pour la bouteille de plastique, les données de la figure 11 sont bien ajustées par une relaxation exponentielle, équation (111), avec un seul paramètre libre, le même pour les deux courbes : $\tau = 7$ h.

(b) Pour les bouteilles en métal, l'ajustement des données est très mauvais, mais les temps caractéristiques qu'on en déduit varient environ comme $V^{1/3}$.

Figure 58

Avec les bouteilles de métal, en revanche, on voit clairement sur la figure 11 que les données n'ont rien à voir avec une exponentielle. Si l'on veut tester l'effet de la taille, on peut chercher l'exponentielle la plus proche de ces points. On trouve des temps τ de 20, 26 et 29 h : leur ordre de grandeur est raisonnable, ils correspondent à un $\eta \approx 1/4$, et ils varient à peu près comme $V^{1/3}$ (voir figure 58(b)). Le modèle n'est donc pas trop mauvais. Alors, pourquoi les données sont-elles si loin d'une exponentielle ? Observez-les attentivement, et passez à la suite.

► Question 11.5.

Commentaire. Est-ce que vous remarquez quelque chose, sur la figure 11 ? On s'attendrait à ce que les échanges de chaleur diminuent au fur et à mesure que la bouteille se refroidit et se rapproche de l'ambiante. C'est ce qu'on a traduit ci-dessus en disant que dT_{int}/dt diminue quand $T_{\text{int}} - T_{\text{amb}}$ diminue. Autrement dit, on attend que la dérivée seconde d^2T_{int}/dt^2 soit de même signe que $T_{\text{int}} - T_{\text{amb}}$. Ceci doit être très général, absolument indépendant de tout modèle ou de toute approximation !

La bouteille plastique montre bien une courbe concave. En revanche, ce n'est pas le cas pour une bouteille en métal. Regardez par exemple la bouteille en métal de 1 l. Pendant les six premières heures, elle ne perd que 4 °C. Or dans les heures suivantes, elle perd bien plus que 4 °C toutes les six heures ! Pourquoi ce mystère ?

Relisez soigneusement la légende de la figure 11, qui explique comment les fabricants ont procédé aux tests. Ils ont préchauffé la bouteille avant de mettre de

l'eau dedans. En conséquence, avant que ne s'établisse le régime qu'on a décrit ci-dessus, la paroi est très chaude ; dans les premières heures, l'eau ne se refroidit guère, l'essentiel des échanges a pour effet de refroidir la paroi. Le démarrage est donc beaucoup plus lent que celui d'une exponentielle.

Vous, en revanche, quand vous versez du café bouillant dans votre thermos avant de partir en randonnée, vous le versez dans une bouteille à température ambiante. Le refroidissement initial est donc beaucoup plus rapide, puisque le liquide contribue à élever la température de la paroi. Si vous mesuriez $T_{\text{int}}(t)$, vous trouveriez bien une courbe concave ressemblant à une exponentielle.

Alors, est-ce de la triche de la part des fabricants de fournir ces données-là ? Non, rien ne vous empêche de procéder comme eux ; certains vous le précisent sur la notice de la bouteille. De même que vous ébouillantez une théière avant d'y préparer du thé, vous pouvez vous aussi préchauffer votre thermos. Versez-y de l'eau bouillante que vous laissez quelques minutes, puis enlevez-la, et ensuite seulement versez-y votre café.

Notes. Plusieurs remarques au sujet de cet exercice :

- Remarquez dans l'équation (108) le rôle essentiel du rapport surface/volume A/V . Ce rapport intervient dans tous les problèmes d'échanges de chaleur, voir page 123. Il augmente quand la taille diminue : c'est l'une des raisons pour laquelle les bébés régulent moins bien leur température que les adultes. Il augmente aussi quand les formes sont plus allongées : c'est l'une des raisons pour laquelle nos doigts, nos pieds et notre nez gèlent avant notre tronc. Si dans votre assiette les pommes de terre sont trop chaudes, vous les écrasez pour augmenter leur rapport surface/volume : ainsi elles se refroidissent plus vite.
- Les meilleures bouteilles thermos sont faites avec un vase « Dewar » : la paroi intérieure est en verre métallisé, et l'espace entre les deux parois est sous un vide poussé. Très efficace en laboratoire, ce genre de thermos est bien trop fragile pour la randonnée. Il a été abandonné depuis les années 1980 au profit du plastique ou du métal, plus solides. Le métal est plus efficace, comme on l'a vu, mais le plastique a du succès à cause de sa légèreté.
- L'équation (113) indique que les pertes qu'il faut compenser ne sont que de l'ordre du watt. Or l'équation (143) montre qu'on peut facilement obtenir une puissance réfrigérante de l'ordre de, disons, 5 W (en évaporant 100 ml d'eau par jour) simplement en entourant la gourde avec un linge mouillé. La gourde mouillée peut donc garder fraîche une boisson, mieux qu'une thermos. Ce n'est que pour les boissons chaudes que la thermos est vraiment utile !
- Une couverture de survie est une fine feuille métallisée. Elle diminue très fortement les échanges par rayonnement, et aussi par convection puisqu'elle vous abrite du vent. Elle peut ainsi vous sauver la vie par grand froid (voire par grande chaleur). En revanche, elle est trop fine pour isoler contre la conduction. Beaucoup de gens ont été gelés pour avoir imprudemment cru qu'ils pouvaient

s'allonger dans la neige avec juste une couverture de survie ! Le duo gagnant, c'est la couverture de survie associée avec une couche d'air : matelas pneumatique, mousse ou mini-mousse.

Ouvertures.

- Exercez-vous à représenter l'analyse qualitative (11.1) sous forme d'un circuit des résistances thermiques : eau, parois, espace entre les parois, bouchons. Déterminez lesquelles sont en parallèle et lesquelles sont en série. Relisez les simplifications (11.2) et vérifiez qu'on a bien toujours négligé les petites résistances (grandes conductivités) en série et les grandes résistances (petites conductivités) en parallèle. Étudiez en particulier la figure 57.
- Pourquoi un double vitrage isole-t-il mieux qu'un simple verre ? Diminue-t-il la convection ? La conduction ? Le rayonnement ? Faites un schéma indiquant ce qui contribue le plus, comme sur la figure 57.
- Vous avez une barre de métal. Prenez-la à pleine main : pourquoi ressentez-vous une sensation de froid ? Pour répondre, déterminez les différentes résistances thermiques en présence, procédez aux approximations qui s'imposent, déterminez la température en tout point et à tout moment.
- À la question : « Combien de temps met le fût du canon à refroidir quand l'obus est parti ? », proposez une réponse plus quantitative que celle de l'humoriste Fernand Raynaud, qui répondait « un certain temps ».

Corrigé 12 Voiture avec chauffeur (Énoncé à la page 24)

Commentaire. Ce problème est typique de la physique de la vie quotidienne : malgré une apparence simple, il fait intervenir un nombre énorme d'approximations et de simplifications. L'article [1] en fait une liste assez complète et en discute plusieurs en détails, en se basant sur ses données expérimentales (d'où proviennent les graphes présentés dans l'énoncé, figures 13(a) et 13(b)).

► Question 12.1.

Notations. On devra établir la liste des notations au fur et à mesure de l'analyse. On peut déjà introduire les grandeurs suivantes :

- la masse m de la voiture : la grosse voiture américaine utilisée dans l'article [1] fait $m = 2 \text{ t}$;
- sa capacité calorifique c par unité de masse : typiquement celle de l'acier, soit $c = 500 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
- la dérivée temporelle \dot{T} de la température T de la voiture : en regardant les données de la figure 13, on voit qu'elle est de l'ordre de 10 K par heure (voir la figure 59), soit $\dot{T} = 10/3600 = 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{s}^{-1} \pm 5 \%$;

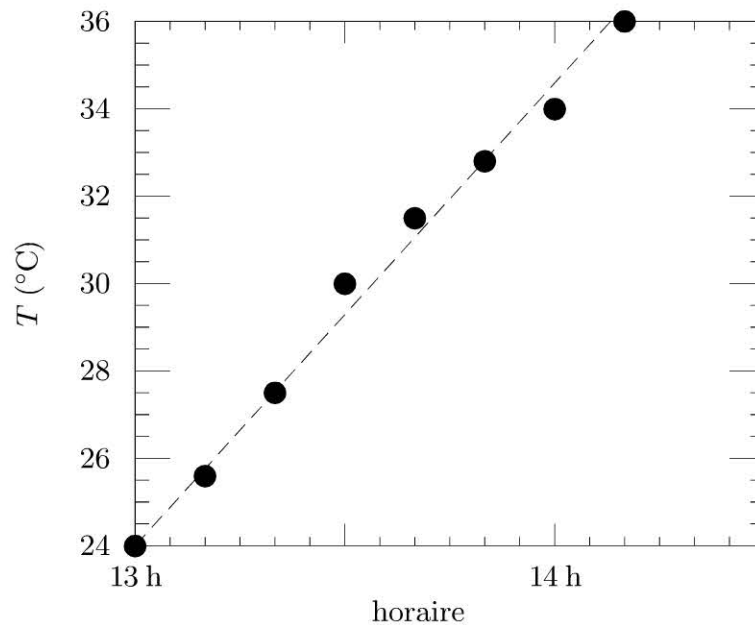


Figure 59 Estimation de la dérivée temporelle \dot{T} de la température de la voiture au soleil.

On a reporté ici les points de mesure de la figure 13, à partir de 13 h.

La droite pointillée est un ajustement linéaire de ces données expérimentales :
sa pente vaut environ $10 \text{ K} \cdot \text{h}^{-1}$.

- le flux Φ_r de rayonnement solaire reçu au niveau de la Terre : c'est ce qu'on cherche à déterminer.

Première approche, ultra-simpliste. La voiture chauffe parce que le Soleil lui fournit une puissance par rayonnement. Le bilan de puissance s'écrit ici en disant que la dérivée temporelle de l'énergie interne est égale à la somme des puissances \mathcal{P} reçues :

$$mc\dot{T} = \sum \mathcal{P}. \quad (114)$$

On connaît le membre de gauche :

$mc = 10^6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ et $mc\dot{T} = 10^6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \times 2,8 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{s}^{-1} = 2,8 \cdot 10^3 \text{ W}$: tout le problème est de retirer correctement le membre de droite à Φ_r .

Nous allons présenter d'abord l'approche la plus simpliste possible : elle est inutilisable car elle est pleine d'approximations inadaptées. On aurait envie d'écrire l'équation (114) sous la forme : $mc\dot{T} = A\Phi_r$, où A est l'aire du toit de la voiture : 13 m^2 dans le cas de la voiture utilisée ici [1]. On trouverait alors : $\Phi_r = mc\dot{T}/A = 215 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

L'ordre de grandeur est certes correct, mais la valeur trouvée est trop faible : c'est seulement 16 % de la valeur tabulée, voir page 288.

Surtout, cette approche ultra-simpliste présente un défaut important : si l'on écrit $mc\dot{T} = A\Phi_r$, on prédit qu'une voiture laissée au soleil verra sa température monter

indéfiniment. C'est absurde ; en effet, la température sature car la voiture rayonne elle-même.

► Question 12.2.

Première analyse qualitative : la voiture à l'ombre. Essayons donc d'apporter quelques corrections, le minimum nécessaire pour décrire correctement la situation physique. Pour cela, commençons à étudier la situation la plus simple : la voiture à l'ombre, qui se refroidit spontanément (voir la figure 13(b)). Elle se refroidit en émettant un rayonnement, et aussi par convection et conduction. Mais est-ce qu'elle va se refroidir indéfiniment, jusqu'au zéro absolu ? Non, ce serait absurde. Comme elle reçoit de la chaleur de son environnement, la voiture se refroidit pour se rapprocher de l'équilibre thermique avec la température ambiante (voir page 127 la discussion de l'équation (107)).

Simplifications. Essayons d'être aussi précis que nous pouvons, tout en restant simple. En fait, quelle précision souhaitons-nous ? Rappelons que nous souhaitons au final trouver la température T_S de la surface du Soleil. Or, quand on aura estimé Φ_r , on en tirera T_S comme une fonction de $\Phi_r^{1/4}$ (voir équations (138) et (141)). C'est très favorable pour nous (voir page 3) : même si l'on faisait une erreur d'un facteur 2 sur Φ_r , on n'aurait que $2^{1/4} = 1,2$ d'erreur sur T_S , soit 20 % d'erreur. Autrement dit : nous sommes obligés de procéder à de nombreuses approximations, mais le résultat ultime n'en dépendra pas trop.

Nous pouvons alors proposer les approximations suivantes :

- Écrivez que toute la voiture est à une température uniforme. Cela revient à traiter de la même manière les vitres et le toit. C'est probablement une assez mauvaise approximation : il fait plus chaud à l'intérieur, juste sous la vitre arrière, que sous la voiture.
- Supposez que la couleur de la voiture est uniforme et sombre (c'est le cas de la voiture utilisée dans [1], qui est marron foncé), donc qu'elle absorbe et réémet bien le rayonnement, voir page 201. Une vitre joue le rôle d'une serre : elle est transparente au visible et opaque à l'infrarouge. Dans un bilan global grossier, si l'on ne fait pas de distinction suivant la longueur d'onde, on peut se contenter de traiter les vitres comme une surface absorbante (noire).
- Ne détaillez pas les échanges thermiques par la conduction et la convection. La voiture reçoit de son environnement un flux Φ_{amb} qui contient une contribution par rayonnement (y compris sous la voiture : le sol émet, comme un corps gris) ; et une contribution par conduction et convection, dominante pour les échanges entre le toit et l'air. Comme ces contributions vont rendre inextricable notre traitement, on les traitera de façon très globale. Vous pouvez par exemple écrire grossièrement que :

$$\Phi_{\text{amb}} \approx \sigma_S T_{\text{amb}}^4. \quad (115)$$

Cette supposition est à peu près correcte, car on exprime qu'à l'équilibre thermique la voiture reçoit autant qu'elle réémet. Il faudra vérifier après coup la qualité de cette approximation.

La valeur numérique de Φ_{amb} est alors :

$$\Phi_{\text{amb}} \approx 5 \cdot 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Plus précisément : Φ_{amb} vaut $4,6 \cdot 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ à 303 K (30 °C), et vaut $5,2 \cdot 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ à 309 K (36 °C).

- Négligez la variation de la température ambiante, ainsi que de toutes les propriétés de la voiture : par exemple de sa capacité calorifique, ou de son coefficient d'émission.

Notations. Moyennant ces simplifications, il suffit pour l'instant des quantités suivantes pour décrire la voiture :

- une température T ;
- un coefficient $e \approx 1$ d'émission et d'absorption ;
- une aire totale A_t , qu'on évaluera plus tard (équation (131)).

Mise en équations. Pour la voiture à l'ombre, l'équation (114) doit tenir compte de ce que la voiture reçoit, moins ce qu'elle rayonne :

$$mc\dot{T} = eA_t (\Phi_{\text{amb}} - \sigma_S T^4). \quad (116)$$

Résolution. On pourrait résoudre cette équation. Or, étant donnée la précision que nous cherchons, et puisque T ne s'écarte que d'une dizaine de degrés de T_{amb} , il est plus sain de la linéariser d'abord (voir page 127). Définissons le petit paramètre $\varepsilon \ll 1$ par :

$$\varepsilon = \frac{T}{T_{\text{amb}}} - 1. \quad (117)$$

L'équation (117) permet de développer T^4 pour linéariser :

$$T^4 = T_{\text{amb}}^4 [1 + 4\varepsilon + O(\varepsilon^2)]. \quad (118)$$

Les équations (115-118) se combinent pour s'écrire :

$$mcT_{\text{amb}}\dot{\varepsilon} = -4eA_t\sigma_S T_{\text{amb}}^4 \varepsilon,$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= -\frac{\varepsilon}{\tau}, \\ \tau &= \frac{mc}{4eA_t\sigma_S T_{\text{amb}}^3}. \end{aligned} \quad (119)$$

Vérifications.

- Homogénéité : le membre de droite de l'équation (119) s'exprime en : $J \cdot K^{-1} / (m^2 \times W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4} \times K^3) = J \cdot W^{-1}$, donc en secondes.
- Signe : comme on l'attend, ε décroît avec le temps.
- Comportement : le temps τ est une fonction décroissante du rapport surface/masse (voir page 145), similaire au rapport surface/volume (voir page 130). La décroissance est exponentielle ; ce qui est normal, puisqu'on a utilisé une approximation linéaire. On obtient le comportement attendu pour une relaxation vers l'équilibre :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0)e^{-t/\tau} \rightarrow 0. \quad (120)$$

Valeurs numériques. Sur la figure 60, la tangente initiale à la courbe permet de déterminer $\tau \approx 3 \text{ h } 30 \text{ min}$ (plus ou moins une demi-heure). Si vous disposez d'une calculatrice ou d'un logiciel qui permet de réaliser un ajustement, vérifiez que les points expérimentaux sont bien ajustés par une exponentielle. Vous trouverez :

$$\varepsilon(t) \approx \varepsilon(0)\exp(-0,28 t),$$

où t est en heure. Cela vous donne une valeur plus précise de τ :

$$\tau = \frac{1}{0,28} \text{ h} = 3,6 \text{ h} = 1,3 \cdot 10^4 \text{ s} \pm 5 \%.$$

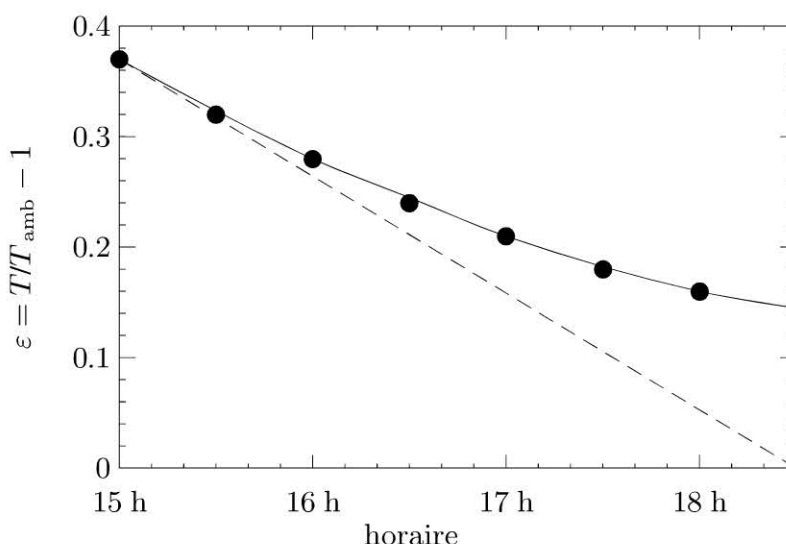


Figure 60 Estimation du temps τ caractéristique du refroidissement de la voiture, équations (119) et (120)

On reprend les points de mesure fournis par la figure 13(b), pour calculer ε , en utilisant sa définition (équation (117)). La courbe en trait continu est un ajustement des données par une exponentielle. La droite pointillée est la tangente à la courbe expérimentale : elle coupe l'axe des abscisses au bout de $3,5 \pm 0,5 \text{ h}$.

► Question 12.3.

Deuxième analyse qualitative : la voiture au soleil. La situation est la même que pour la voiture à l'ombre, mais vous devez rajouter un terme supplémentaire : la puissance \mathcal{P}_r reçue du Soleil.

Mise en équations. Ici encore, le bilan de puissance (équation (114)) tient compte de ce que la voiture reçoit, moins ce qu'elle rayonne :

$$mc\dot{T} = eA_t (\Phi_{\text{amb}} - \sigma_S T^4) + e\mathcal{P}_r. \quad (121)$$

En utilisant la même variable adimensionnée que ci-dessus, $\varepsilon = T/T_{\text{amb}} - 1$ (équation (117)), le bilan de puissance (équation (121)) devient :

$$mcT_{\text{amb}}\dot{\varepsilon} = -4eA_t\sigma_S T_{\text{amb}}^4 \varepsilon + e\mathcal{P}_r,$$

c'est-à-dire :

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{e\mathcal{P}_r}{mcT_{\text{amb}}},$$

ou encore, en regroupant avec les équations (115) et (119) :

$$\tau\dot{\varepsilon} = -\varepsilon + \frac{\mathcal{P}_r}{4A_t\Phi_{\text{amb}}}. \quad (122)$$

Vérifications.

- L'homogénéité est facile à vérifier : puisque Φ_{amb} est un flux, $A_t\Phi_{\text{amb}}$ est bien une puissance.
- Le signe est correct : il y a compétition entre le Soleil qui tend à élever la température, et le refroidissement qui tend à équilibrer avec l'ambiante.
- Enfin, le comportement est correct, puisqu'on trouve une exponentielle qui croît et sature :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(\infty)(1 - e^{-t/\tau}), \quad (123)$$

où la valeur limite à saturation est :

$$\varepsilon(\infty) = \frac{\mathcal{P}_r}{4A_t\Phi_{\text{amb}}}. \quad (124)$$

Valeurs numériques. Puisqu'on a déjà déterminé τ , la seule inconnue de l'équation (123) est $\varepsilon(\infty)$. Il suffit donc d'ajuster ce paramètre sur les données expérimentales. Elles ne concernent qu'un tout petit bout de l'exponentielle. Il serait donc dif-

facile de faire un ajustement complet sur l'ensemble de la courbe. Il est plus simple et plus précis de prendre la pente à l'origine (voir la figure 59) :

$$\varepsilon(\infty) = \tau \dot{\varepsilon}(0) = \tau \frac{\dot{T}}{T_{\text{amb}}}. \quad (125)$$

On vérifie que l'équation (125) est bien homogène, puisque les deux membres sont sans dimension. On remplace par les valeurs déjà trouvées, $\dot{T} \approx 10 \text{ K} \cdot \text{h}^{-1}$, $\tau = 3,6 \text{ h}$:

$$\varepsilon(\infty) = 3,6 \text{ h} \times \frac{10 \text{ K} \cdot \text{h}^{-1}}{300 \text{ K}} = 0,12.$$

Autrement dit, si l'on abandonnait la voiture en plein soleil pendant des heures et des heures jusqu'à ce qu'elle atteigne la saturation, la température de la voiture tendrait vers $T(\infty) = (1 + 0,12) \times T_{\text{amb}}$:

$$\begin{aligned} T &\rightarrow T(\infty) = T_{\text{amb}} + 0,12 \times T_{\text{amb}} \\ &= T_{\text{amb}} + 36 \text{ K} \approx 60^\circ \text{C}. \end{aligned} \quad (126)$$

C'est chaud ! Rappelons qu'il s'agit d'une moyenne : il ferait moins que cela sur le dessous de la voiture, mais il ferait encore plus chaud que cela sur la plage arrière.

► Question 12.4.

Analyse qualitative. En regroupant les équations (124) et (125), on peut en déduire la puissance \mathcal{P}_r que la voiture reçoit du Soleil :

$$\mathcal{P}_r = 4A_t \Phi_{\text{amb}} \varepsilon(\infty). \quad (127)$$

Il vous faut maintenant relier \mathcal{P}_r avec le flux Φ_r reçu par la Terre, qui nous intéresse. Or \mathcal{P}_r est le produit de deux termes :

$$\mathcal{P}_r = \Phi_a A_p, \quad (128)$$

que nous allons maintenant définir :

- Φ_a est le flux arrivant au sol, au niveau de la voiture, après avoir traversé l'atmosphère :

$$\Phi_a = a \Phi_r, \quad (129)$$

où $a < 1$ est un facteur numérique représentant la réflexion sur la haute atmosphère et l'atténuation lors de la traversée de l'atmosphère.

- A_p est l'aire projetée, sur un plan perpendiculaire à la direction du Soleil, qui capte ce flux :

$$A_p = A_o \cos \theta, \quad (130)$$

où A_o est l'aire de l'ombre de la voiture ; $\cos \theta$ est le facteur de projection, où θ est l'angle que fait le Soleil avec la verticale.

L'aire A_o de l'ombre de la voiture et l'aire totale A_t sont proportionnelles l'une à l'autre :

$$A_t = b A_o, \quad (131)$$

où b est un facteur numérique que vous pouvez mesurer en regardant une voiture.

Regroupement des équations. En regroupant les équations (128-131), on obtient :

$$\mathcal{P}_r = \frac{a}{b} \cos \theta \Phi_r A_t, \quad (132)$$

Or ce qu'on cherche, c'est Φ_r , dont on peut écrire l'expression, grâce aux équations (127) et (132) :

$$\frac{\Phi_r}{\Phi_{\text{amb}}} = \frac{4b}{a \cos \theta} \varepsilon(\infty). \quad (133)$$

Vérifications.

- L'équation (133) est homogène, puisque ses deux membres sont sans dimension. Il est rassurant de voir qu'on mesure Φ_r en le rapportant au seul flux dont on dispose, en l'occurrence Φ_{amb} (équation (115)).
- Signe : les deux termes sont positifs, rien à dire.
- Comportement : on vérifie que Φ_r/Φ_{amb} et la température finale $\varepsilon(\infty)$ augmentent ensemble. Plus $a \cos \theta$ est grand (c'est-à-dire proche de 1), plus la voiture profite du flux reçu ; plus b est grand, plus elle réémet et se refroidit.

Valeurs numériques.

- Le facteur a , défini à l'équation (129), dépend de la hauteur du Soleil et de la météo. Sa valeur exacte n'est pas cruciale, voir l'équation (137) et surtout l'équation (142). On peut mettre, à la louche (voir « Notes ») :

$$a \approx 0,5. \quad (134)$$

- Le facteur b , défini à l'équation (131), s'évalue en observant que A_t contient le toit, les côtés et le dessous de la voiture. Il est donc de l'ordre de :

$$b \approx 3. \quad (135)$$

– Quant à θ , on peut l'estimer de deux façons au choix :

- 1) Expérimentalement : prenez par exemple un poteau (ou un arbre, sur la figure 12). Le rapport entre la longueur au sol de l'ombre, et sa hauteur, donne $\tan \theta$.
- 2) Théoriquement : pour cela, il faut connaître la latitude θ_{lat} du lieu où vous êtes. En effet, à midi, θ vaut la latitude du lieu, corrigée par un terme qui dépend de la saison. L'axe des pôles est incliné de $\alpha_{\text{axe}} = 23^\circ 27'$ sur le plan de l'orbite terrestre (voir page 288). En été, θ diminue, et atteint $\theta = \theta_{\text{lat}} - \alpha_{\text{axe}}$ au solstice de juin ; en hiver, θ augmente, et atteint $\theta = \theta_{\text{lat}} + \alpha_{\text{axe}}$ au solstice de décembre.

Par exemple, lorsque j'écris ce livre, je suis à Grenoble (France), $\theta_{\text{lat}} = 45^\circ$, et pour un jour d'été vers midi, je prends comme valeur numérique $\theta \approx 25^\circ$, soit :

$$\cos \theta = 0,9. \quad (136)$$

– Le facteur numérique qui intervient dans l'équation (132) vaut donc environ :

$$\frac{a}{b} \cos \theta \approx \frac{0,5}{3} \times 0,9 = 0,15 \pm 25 \, \%.$$

– On en tire finalement Φ_r (équation (133)) :

$$\Phi_r \approx 3,2 \Phi_{\text{amb}} = 1,6 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \pm 30 \, \%, \quad (137)$$

où l'on a estimé l'incertitude en considérant que tous les facteurs ont des incertitudes indépendantes (voir page 3).

Cette valeur numérique est compatible avec la valeur tabulée $1,35 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ (voir page 288) : la différence n'est que de 20 %, inférieure à notre incertitude. Cet accord, meilleur que celui de l'article [1], vient de ce que l'équation (133) n'utilise que $\varepsilon(\infty)$, tiré directement des données expérimentales, équation (125). On n'utilise absolument pas les détails des propriétés de la voiture comme A_t , mc ou e .

► Question 12.5.

Notations. On cherche la température apparente T_S du Soleil. Mais comment est-elle définie ? La lumière que nous voyons provient essentiellement d'une couche du Soleil appelée photosphère : à l'intérieur de la photosphère, le Soleil est opaque, donc les photons se thermalisent avec la matière ; à l'extérieur de la photosphère, la matière est ténue et les photons sortent librement. La photosphère étant une zone de transition, la température y décroît de plusieurs milliers de degrés sur quelques centaines de kilomètres. La température apparente T_S est donc la moyenne d'une quantité très variable.

Pour la définir, appuyons-nous sur les quantités qui sont bien connues et bien définies :

- le flux Φ_e émis par le Soleil ;
- la puissance totale \mathcal{P}_e émise par le Soleil ;
- le rayon apparent R_S du Soleil : il est défini précisément car la photosphère est une couche mince, épaisse d'à peine quelques centaines de kilomètres (voir page 288).

Mise en équations. Comment pouvez-vous remonter à T_S , connaissant Φ_r ? Pour utiliser les grandeurs que nous venons d'introduire, on aura envie d'utiliser la relation de Stefan :

$$\Phi_e = \sigma_S T_S^4, \quad (138)$$

$$\mathcal{P}_e = 4\pi R_S^2 \sigma_S T_S^4. \quad (139)$$

Attention, \mathcal{P}_e n'est pas du tout égale à la puissance \mathcal{P}_r qui nous intéresse, celle que nous recevons sur Terre à une distance d_S (rayon de l'orbite de la Terre). En revanche, ce que l'on peut écrire, c'est que toute la puissance émise par le Soleil se retrouve intégralement sur une sphère de rayon d_S :

$$\mathcal{P}_e = 4\pi d_S^2 \Phi_r,$$

ce qui nous donne finalement le rapport des flux reçus sur Terre et émis par le Soleil :

$$\frac{\Phi_r}{\Phi_e} = \left(\frac{R_S}{d_S} \right)^2 = \alpha_S^2. \quad (140)$$

L'équation (140) n'utilise que le rayon angulaire apparent du Soleil, $\alpha_S = 4,6 \cdot 10^{-3}$ rad : vous pouvez facilement le mesurer vous-même, voir page 200.

Résolution et valeur numérique. Les équations (138) et (140) donnent alors ce qu'on cherche, c'est-à-dire T_S connaissant Φ_r :

$$T_S = \left(\frac{\Phi_e}{\sigma_S} \right)^{1/4} = \left(\frac{\Phi_r}{\alpha_S^2 \sigma_S} \right)^{1/4}. \quad (141)$$

L'exposant 1/4 est très sympathique (voir page 3 et page 133) : malgré l'incertitude sur Φ_r , on trouve T_S avec une incertitude faible :

$$\begin{aligned} T_S &= \left[\frac{1,6 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}}{(4,6 \cdot 10^{-3} \text{ rad})^2 \times 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}} \right]^{1/4} \\ &= 6 \cdot 10^3 \text{ K} \pm 8 \%. \end{aligned} \quad (142)$$

C'est tout à fait compatible avec la valeur tabulée, qui est $5,8 \cdot 10^3 \text{ K} \pm 1 \%$. C'est bien meilleur que l'approche ultra-simpliste (voir page 132 : si on avait pris $\Phi_r = 215 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ dans l'équation (141), on aurait trouvé $T_S \sim 4 \cdot 10^3 \text{ K}$). Donc les simplifications auxquelles nous avons procédé sont à peu près justifiées.

Notes.

- Où intervient la couleur de la voiture ? Curieusement, le coefficient e d'émission et d'absorption semble avoir disparu de l'équation (122), et donc de la température finale (équation (124)). En effet, ce terme s'est simplifié, car dans l'équation (121) on a décrit les échanges thermiques comme s'ils se faisaient tous par rayonnement, donc tous proportionnels à e . En fait, si l'on tient compte à la fois du rayonnement (qui dépend de e) et de la convection (qui n'en dépend pas), alors e ne se simplifie pas. La température d'équilibre de la voiture dépend donc un peu de sa couleur.

Mais surtout, la couleur modifie le temps τ de thermalisation : plus la voiture est claire (e petit), plus les échanges thermiques sont faibles, plus le temps τ est long (équation (119)).

En pratique, la température met un temps $\tau = 3 \text{ h } 30 \text{ min}$ à suivre les fluctuations de l'ensoleillement. Or, pendant ce temps, l'ensoleillement varie. Elle n'est donc quasiment jamais à une valeur d'équilibre. Plus la voiture est claire, plus elle est loin de sa valeur d'équilibre.

- La valeur grossière de a (équation (134)) serait plutôt correcte, pour un jour de grand beau temps vers midi en été, si l'on en croit l'article [1]. En effet, il indique 37 % de réflexion sur la haute atmosphère (albedo de la Terre) et environ 25 % du rayonnement absorbé par l'atmosphère (qui contribuera à réchauffer l'atmosphère, donc la voiture via le terme Φ_{amb}). Cela donnerait alors $a \approx (1 - 0,37) \times (1 - 0,25) \approx 0,5$. En pays tropical, lorsque la lumière solaire arrive verticalement, l'effet de l'atmosphère est moindre, $a \approx 0,75$, et l'on atteint presque $1\,000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.
- « Aujourd'hui, il fera 25°C à l'ombre... » Pourquoi les météorologistes parlent-ils toujours de température « à l'ombre » ? Parce que c'est la seule quantité qui a un sens mesurable, indépendamment du thermomètre.

En effet, un thermomètre placé à l'ombre se met en équilibre thermique avec l'air ambiant en quelques minutes (équation (119) : la masse m est bien plus faible que pour une voiture). Donc s'ils sont placés à l'ombre, différents thermomètres indiqueront tous la même valeur.

En revanche, s'ils sont placés au soleil, différents thermomètre indiqueront une valeur $T(\infty)$ plus élevée que T_{amb} . La différence sera $T(\infty) - T_{\text{amb}} = T_{\text{amb}} \varepsilon(\infty)$, soit quelques dizaines de degrés. La valeur indiquée dépend de la couleur du thermomètre (voir « Notes » ci-dessus) et de sa forme (coefficient b dans l'équation (133)), sans oublier de la couleur du mur où on l'accroche, et la vitesse du vent !

Ouvertures.

- Comparez la température de la voiture selon qu'on couvre ou non les vitres. Choisissez-vous de les couvrir d'un carton ou d'un réflecteur métallisé ? Vaut-il mieux le placer à l'intérieur ou à l'extérieur de la voiture ?
- La température ambiante T_{amb} varie dans la journée. Prenez une expression à peu près réaliste, par exemple une sinusoïde de période 24 h et d'amplitude 30 K, et tracez l'allure de la température T de la voiture en fonction du temps. Quel est le temps de décalage entre le moment où T_{amb} est maximum, et celui où T est maximum ? Et pour le minimum de température, le temps de décalage est-il le même ?
- En hiver, vous gardez un soir une voiture à côté d'un mur. Vous revenez le lendemain matin et trouvez du givre sur les fenêtres de la voiture. Observez de quel côté il y a plus de givre : sur le côté près du mur, ou sur le côté opposé ? Pouvez-vous l'expliquer ?
- Est-ce que le flux que nous recevons du Soleil peut expliquer la température de l'atmosphère terrestre ? Et la température interne de la Terre ? Ces deux questions sont bien distinctes (voir [2]).
- Déterminez le flux que nous recevons de la Lune. Pour cela :
 - Utilisez un raisonnement similaire à celui de la question 12.5, et les données de l'exercice 5.
 - Considérez que la Lune reçoit du Soleil le même flux lumineux que nous.
 - Oubliez temporairement qu'il y a un facteur de réflexion (facteur numérique dont l'ordre de grandeur est 1), et un facteur géométrique un peu subtil dû au fait que la Lune est sphérique et non pas plate.
 - Concentrez-vous sur l'essentiel : l'angle apparent sous lequel nous voyons la Lune.
 - Utilisez la loi de décroissance en inverse de la distance au carré (équation (140)).
 - Comparez ce que nous recevons de la Lune, avec ce que nous recevons d'un lampadaire dans la rue, ou d'une lampe à incandescence de 100 W dans une pièce de 10 m^2 (voir page 285).
 - Comparez ce que nous recevons de la Lune et des planètes. En particulier, Vénus et Mars ont une taille comparable à celle de la Terre ; Vénus est environ deux fois plus près du Soleil, Mars deux fois plus loin : Vénus nous apparaît combien de fois plus brillante que Mars ?
 - Avec le même raisonnement, étudiez ce qui se passe quand un flash éclaire des visages, qui renvoient la lumière vers l'appareil photo. Montrez que les personnages au premier plan apparaissent bien plus clairs que ceux qui sont au second plan. Un flash est-il plus utile pour photographier une surface claire et diffuse, comme un visage, ou une surface brillante et réfléchissante, comme un miroir ?

Sources et références

- [1] W. LEE, H.L. GILLEY et J.B. CARIS. Finding the Surface Temperature of the Sun using a Parked Car. *American Journal of Physics*, volume 65, 1997, pages 1105-1109.
- [2] F. GRANER. *Petits problèmes de physique – première partie*. Springer, Heidelberg, 1998. Exercice L.

Corrigé 13 Boire au frais sous la tente (Énoncé à la page 25)

► Question 13.1.

Le réfrigérateur de brousse. Pouvez-vous analyser ce réfrigérateur de brousse de façon globale, à partir des principes de la thermodynamique, sans vous occuper pour l'instant de la réalisation pratique ?

Analyse thermodynamique. Notons A l'air, R le réfrigérateur lui-même, L les légumes qu'il contient (voir la figure 61). L'effet du Soleil est de chauffer l'atmosphère, on n'a pas besoin de s'en occuper plus en détail. Le rôle du réfrigérateur est d'avoir un pouvoir réfrigérant positif, $Q_L > 0$. Cela lui permet d'abaisser la température T_L des légumes au-dessous de celle de l'atmosphère, $T_L < T_A$. Les échanges de chaleur dus aux fuites thermiques croissent avec $T_A - T_L$ et finissent par compenser Q_L : on atteint alors le régime permanent, où T_L est constante. La seule question qui se pose est celle du signe de Q_A : positif ou négatif ?

Examinons ce que vous dit la thermodynamique pour un système fermé invariant dans le temps. Le premier principe indique que le flux total d'énergie qu'il reçoit est nul. Comme $Q_L > 0$, on doit avoir $Q_A < 0$. En revanche, le second principe interdit de créer un flux spontané de chaleur des légumes, froids, vers l'atmosphère, plus chaud : il indique donc que $Q_A > 0$. Il y a incompatibilité.

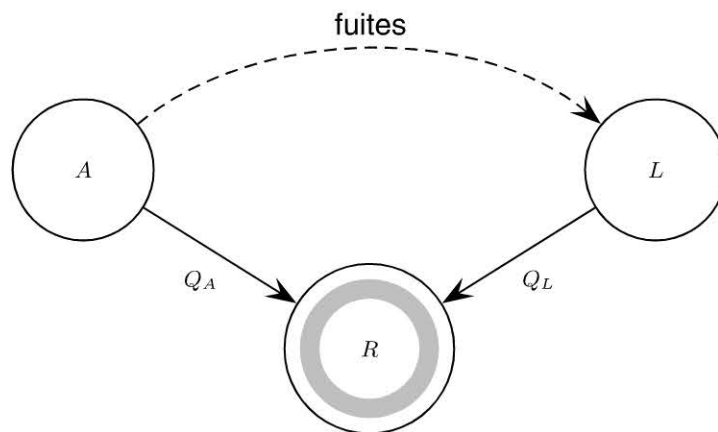


Figure 61 Schéma des échanges de chaleur du réfrigérateur de brousse.

Conclusion : nécessairement, le réfrigérateur est un système ouvert qui varie dans le temps ! Comment ? Réfléchissez avant de lire ce qui suit, essayez de comprendre physiquement ce qui se passe, déterminez les signes correctement, et appliquez proprement les principes de la thermodynamique.

Fonctionnement. L'idée doit donc nécessairement être la suivante : dans un endroit chaud, sec et ventilé, l'eau s'évapore sans cesse. Pour évaporer de l'eau, il faut lui fournir de la chaleur : la chaleur latente de vaporisation. Il y a donc un flux de chaleur vers l'eau, depuis les autres corps en contact thermique avec elle : à la fois l'atmosphère ($Q_A > 0$) et les légumes ($Q_L > 0$). Puisque les légumes fournissent de l'énergie à l'eau, l'énergie interne des légumes diminue, et par conséquent leur température aussi. Simultanément, la quantité d'eau diminue peu à peu : il faut en remettre de temps en temps. Les signes sont cohérents et les deux principes de la thermodynamique sont respectés.

Bilan. Si l'on définissait l'efficacité d'un réfrigérateur comme le rapport de la chaleur extraite sur l'énergie payée, alors le réfrigérateur de brousse aurait une efficacité illimitée ! En effet il n'y a pas de source d'énergie payante : toute l'énergie vient de l'atmosphère, c'est-à-dire de l'énergie solaire. Ce qu'on consomme, et donc qui coûte, c'est deux litres d'eau par jour, qu'on amène sous forme liquide et qui part comme vapeur dans l'atmosphère. Si pour fixer les idées on se base sur un tarif de 2 € T.T.C. par mètre cube (c'est ce que je paye), le coût quotidien de fonctionnement est de $2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{jour}^{-1} \times 2 \text{ €} \cdot \text{m}^{-3}$, soit 0,4 centime par jour, voir « Notes ».

Quelle est la puissance réfrigérante de ce réfrigérateur ? Comme on connaît sa consommation, on peut déjà répondre sans entrer dans les détails. Quand le nombre de m^3 d'eau qui s'évaporent est n , le nombre de kg d'eau qui s'évaporent est $n\rho_e$ où ρ_e est la masse volumique de l'eau, et la chaleur extraite est :

$$Q_L = n\rho_e L_e,$$

où $L_e = 2,4 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ est la chaleur latente d'évaporation de l'eau (voir page 287). Le taux d'évaporation est $\dot{n}\rho_e$; la puissance réfrigérante disponible est donc :

$$\begin{aligned} \dot{n}\rho_e L_e &= 2 \text{ kg} \cdot \text{jour}^{-1} \times 2,4 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \\ &= 4,8 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{jour}^{-1} \approx 50 \text{ W}. \end{aligned} \quad (143)$$

On produit de l'entropie à un taux de $50 \text{ W}/300 \text{ K} = 170 \text{ mW} \cdot \text{K}^{-1}$. Notez que cette entropie aurait été produite de toute façon, même sans réfrigérateur, si l'on avait laissé l'eau s'évaporer à l'air libre.

Si l'on veut pouvoir améliorer ce réfrigérateur, il faut comprendre un peu mieux de quoi dépend la puissance réfrigérante, donc entrer plus dans les détails. On peut

écrire ici le bilan d'énergie pour la jatte pendant un temps dt , de la même façon que l'équation (107). L'équation (143) permet d'obtenir l'équation d'évolution de la température interne moyenne T_{int} du réfrigérateur, en notant m sa masse totale (jatte, eau, et légumes) :

$$mc_V dT_{\text{int}} = -\dot{n}\rho_e L_e dt + \text{pertes}.$$

En toute rigueur, il faudrait écrire finement la façon dont les pertes dépendent de la température : on décrirait ainsi le fait que la température intérieure finit par se stabiliser (voir équations (107) et (124)). Cependant, avec les données dont on dispose, il est difficile d'évaluer ces pertes.

Pour simplifier les calculs, on peut plutôt introduire brutalement l'efficacité du réfrigérateur comme un nombre η entre 0 et 1, vraisemblablement assez bas. Cela permet d'écrire une équation physiquement équivalente, mais plus utilisable :

$$mc_V dT_{\text{int}} = -\eta\dot{n}\rho_e L_e dt. \quad (144)$$

Par ailleurs, \dot{n} peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\dot{n} = kS \times [P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{vap}}], \quad (145)$$

où k est une constante, S est la surface par où se fait l'évaporation, $P_{\text{sat}}(T)$ est la pression de vapeur saturante de l'eau à la température T , P_{vap} la pression partielle de vapeur d'eau dans l'air ambiant. On peut évaluer un ordre de grandeur du taux d'évaporation par unité de surface, $\dot{n}/S = k \times [P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{vap}}]$, voir l'équation (340). En regroupant les équations (144) et (145), on obtient finalement :

$$\frac{dT_{\text{int}}}{dt} = -k\eta\rho_e L_e \frac{S}{mc_V} [P_{\text{sat}}(T) - P_{\text{vap}}]. \quad (146)$$

Vérifications. Vérifiez cette équation :

- Homogénéité : à cause de la constante k , l'équation (146) est difficile à vérifier. Mieux vaut vérifier l'équation (144).

Le membre de gauche est en $\text{kg} \times \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times \text{K} = \text{J}$,

le membre de droite en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \times \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \times \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \times \text{s} = \text{J}$,

c'est donc bien un bilan d'énergie.

- Le signe est correct : la température décroît.
- Le comportement de cette équation est à peu près raisonnable. En particulier, il montre que la qualité du réfrigérateur dépend de son rapport S/m (voir page 135), similaire au rapport surface/volume (voir page 130). En revanche, comme on l'a précisé en introduisant η , la variation de la température n'est pas décrite finement.

Réalisation. Comment améliorer ce réfrigérateur ? On peut naturellement jouer sur sa construction. On peut ainsi augmenter son rapport surface/masse (c'est-à-dire surface/volume), voir « Notes ». On peut aussi diminuer les pertes, par exemple en posant un couvercle sur la jatte. Enfin, pour maximiser l'évaporation sans gaspiller d'eau, les potiers savent également jouer sur la porosité de la terre pour que l'eau suinte, ni trop ni trop peu, exactement au rythme où elle peut s'évaporer.

D'un autre côté, on peut améliorer les conditions de fonctionnement [1]. $P_{\text{sat}}(T)$ n'est pas un paramètre sur lequel on peut jouer, car il est imposé par la température ambiante : plus il fait chaud et mieux cela marche. Au contraire, si T se rapprochait de 0°C , plus rien ne fonctionnerait. Il s'agit donc d'un réfrigérateur pour temps chaud. De même, P_{vap} est fixé par l'air ambiant : plus l'air est sec, mieux ça marche. La seule chose qu'on peut faire, c'est de s'assurer qu'on ventile bien, sinon l'eau évaporée fait augmenter P_{vap} et le réfrigérateur ne fonctionne plus. C'est tout à fait cohérent avec ce qu'indique l'énoncé.

► Question 13.2.

Réfrigérateur tritherme. Le réfrigérateur tritherme s'appelle ainsi car, par rapport au réfrigérateur précédent, il a une source de chaleur supplémentaire, que nous noterons C (voir la figure 62). Cela peut être la flamme du gaz, ou une résistance électrique chauffante. Elle permet d'inverser le signe des échanges avec l'atmosphère : désormais $Q_A < 0$. Elle joue donc le même rôle que la source de travail dans un réfrigérateur électrique usuel à compresseur.

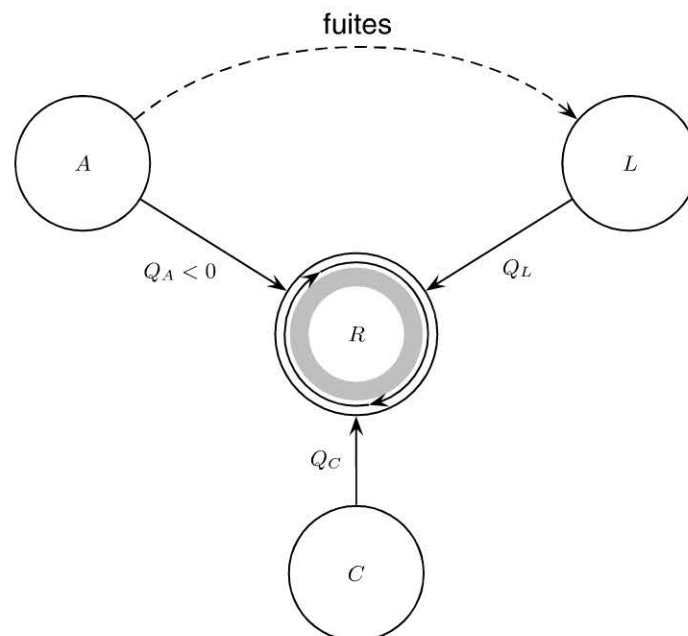


Figure 62 Schéma des échanges de chaleur du réfrigérateur tritherme.

Analyse thermodynamique. Cela viole-t-il le premier ou le second principe ? Non. Il doit nécessairement y avoir un fluide caloporteur, qui est tantôt plus froid que les légumes (quand il est en contact avec eux, pour avoir $Q_L > 0$), tantôt plus chaud

que l'atmosphère (pour avoir $Q_A < 0$). Ce fluide caloporteur existe bel et bien, c'est lui que l'on entend buller ; par contre on ne le voit pas sortir, car il reste en circuit fermé et décrit un cycle.

Fonctionnement. Il reste une question en suspens : puisqu'il n'y a pas de pompe mécanique, qu'est-ce qui fait circuler ce liquide ? Pas de mystère : il n'y a qu'une seule source d'énergie disponible, c'est la source de chaleur. Nécessairement, le mouvement doit être créé par la convection thermique : le liquide est chauffé en bas, sa densité diminue, donc il monte. Plus précisément, le liquide caloporteur a sûrement été choisi pour se vaporiser, ce qui améliore à la fois la convection (le gaz est nettement moins dense que le liquide) et les échanges thermiques (grâce à la chaleur latente de changement d'état). En haut, il cède de la chaleur à l'extérieur, il se condense et retombe en bas.

Bilan. Les deux principes de la thermodynamique appliqués au cycle du liquide caloporteur impliquent respectivement :

$$\begin{aligned} Q_L + Q_C + Q_A &= 0, \\ \frac{Q_L}{T_L} + \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_A}{T_A} &\leq 0. \end{aligned} \quad (147)$$

L'efficacité est $\varepsilon = Q_L/Q_C$, pour la trouver il faut éliminer Q_A des équations (147) :

$$\frac{Q_L}{T_L} + \frac{Q_C}{T_C} - \frac{Q_L + Q_C}{T_A} \leq 0.$$

On en tire :

$$\varepsilon \left(\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_A} \right) + \frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_A} \leq 0.$$

D'où :

$$\varepsilon \leq \frac{T_C - T_A}{T_C} \frac{T_L}{T_A - T_L}.$$

Notons immédiatement que C est une source de chaleur à puissance fixée, ce n'est donc pas un réservoir à température fixée (malgré ce que suggère à tort le nom « tri-therme »). Par conséquent T_C est une quantité mal définie. Comme elle est certainement très supérieure à T_A , on obtient une borne supérieure raisonnable pour l'efficacité ε en remplaçant $(T_C - T_A)/T_C$ par 1 :

$$\varepsilon < \frac{T_L}{T_A - T_L} \approx 10. \quad (148)$$

C'est tout à fait comparable aux réfrigérateurs électriques usuels à compresseur.

Pour obtenir une puissance réfrigérante de l'ordre de 50 W, comme pour le réfrigérateur à eau (équation (143)), ici la puissance payée est de 5 W (donc un taux de production d'entropie de $5 \text{ W}/300 \text{ K} = 17 \text{ mW} \cdot \text{K}^{-1}$), ce qui n'est pas beaucoup non plus. Si, pour fixer les idées, on se base sur un tarif de 4 centimes T.T.C. par kilowattheure de gaz (ou 9 centimes par kilowattheure électrique) le coût quotidien de fonctionnement est de $5 \cdot 10^{-3} \text{ kW} \times 24 \text{ h} \times 0,04 \text{ €} \cdot \text{kWh}^{-1}$, soit 0,5 centime par jour, comme le réfrigérateur de brousse.

Réalisation. Comment choisir le fluide caloporteur ? Il reste en circuit fermé et décrit un cycle. C'est un avantage : puisqu'on ne perd pas de fluide, son coût n'est pas un problème. On peut donc choisir un fluide plus performant que l'eau. En particulier, il faut qu'il puisse encore se volatiliser (donc il doit avoir une pression de vapeur suffisante, de l'ordre de 1 bar au moins [2]) à une température bien inférieure à 4 °C, température de fonctionnement du réfrigérateur. Plutôt que l'ammoniac, dangereux, on cherche des produits voisins des fréons, mais moins nocifs pour la couche d'ozone : par exemple le tétrafluoroéthane $\text{CF}_3\text{-CH}_2\text{F}$ appelé « R134a » [2].

Notes.

- La sensation de fraîcheur ou de chaleur due à la boisson a un triple origine. Tout d'abord, de même qu'on mange pour se chauffer (exercice 9), on boit pour se refroidir, grâce à l'évaporation. C'est l'objet de cet exercice. Ensuite, il y a l'effet de la température de ce qu'on boit. Si on boit une boisson fraîche, comme de la bière, cela ajoute à la sensation de fraîcheur. Une boisson chaude, comme du thé à la menthe, a deux effets opposés : d'une part, on reçoit quelques joules en plus, ce qui est agréable par temps froid (voir page 115) ; mais par temps chaud, où l'on transpire, le thé chaud rafraîchit plus longtemps que la bière : en effet, la sueur sort plus lentement, petit à petit. Enfin, le troisième effet dépend du métabolisme : ainsi, l'alcool a un effet à cause de la façon dont on le digère (voir page 116).
- Ce principe de refroidissement à eau simple et naturel est très répandu :
 - Tandis qu'il fait 35 °C dehors, les termites font circuler de l'air humide : elles climatisent par évaporation leurs immenses galeries souterraines, et les maintiennent autour de 20 °C (au-dessus, elles meurent).
 - Un chien halète pour se rafraîchir.
 - On éprouve une sensation de fraîcheur en sortant d'un bain (même chaud), soit en extérieur, soit dans une salle de bains dont on ouvre la porte, même si la pièce d'à-côté est à la même température.
 - Pour garder fraîche une gourde, on l'imbibe d'eau (si elle est en cuir, comme une gourde basque), ou on l'entoure d'un linge mouillé (si elle est en métal).
 - Les anciens Égyptiens savaient ainsi fabriquer de la glace.
 - Voir aussi l'exercice 27, et la page 130.

- C'est Mohammed Bah Abba, du Nigéria [3], qui a optimisé et modernisé cette méthode, en utilisant du sable mouillé enfermé entre deux pots concentriques, plutôt qu'un seul pot mouillé qui suinte. Son succès est spectaculaire et il se répand internationalement. Il permet de garder dix fois plus longtemps des légumes périssables, comme des tomates ou des épinards. Son coût de fabrication est très faible : il revient à trente centimes pièce. Son coût de fonctionnement est aussi très faible, mais en pratique ce n'est pas toujours le prix de l'eau qui compte : on raisonne aussi en pensant au travail qu'on doit fournir pour aller la chercher.
- Un réfrigérateur de 20 cm de diamètre, portable par un enfant, a un meilleur rapport surface/volume, donc est meilleur qu'un réfrigérateur pour adulte de 60 cm de diamètre. Cependant, si l'on a beaucoup de légumes à conserver, c'est dommage de réduire la taille de son réfrigérateur : mieux vaut en prendre un grand, et augmenter sa surface d'échange, donc son rapport surface/volume en jouant sur sa forme [1]. On peut encore agrandir le système et climatiser sur ce principe une case d'habitation entière.
- On peut parfois voir un autre exemple de refroidissement par évaporation, devant un aéroport. Si des campeurs veulent conserver leur réchaud dans leur bagage qui voyage en soute, ils doivent vider leur cartouche de gaz. C'est un exemple de détente très spectaculaire : la cartouche se refroidit vite, et se couvre de givre.
- En laboratoire, le refroidissement par évaporation est aussi utilisé pour refroidir un nuage d'atomes. On piège les atomes dans un puits de potentiel. Les atomes qui ont peu d'énergie cinétique y restent enfermés, tandis que les atomes qui ont assez d'énergie cinétique peuvent s'échapper. Au total, une partie du nuage d'atomes s'évapore, tandis que la partie qui reste a une énergie cinétique moyenne de plus en plus basse. C'est-à-dire que sa température diminue [4].
- Comparons la source d'énergie des deux réfrigérateurs. Le premier utilise la chaleur latente d'évaporation de l'eau, c'est-à-dire qu'il casse des liaisons hydrogène et en récupère l'énergie. Le second brûle des hydrocarbures, c'est-à-dire qu'il casse des liaisons covalentes et en récupère l'énergie. Les énergies récupérées sont respectivement $2,4 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ (voir page 287) et $5 \cdot 10^7 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ (voir page 288). On voit que ces nombres ne sont pas si différents que cela. La combustion de l'hydrocarbure fournit environ 20 fois plus, mais elle cesse d'être avantageuse dès que l'on compare les coûts.

Ouvertures. Tracez les différents diagrammes thermodynamiques du cycle parcouru par le fluide caloporteur du réfrigérateur tritherme : par exemple dans le plan (pression, volume), ou bien (température, entropie), voire encore (logarithme de la pression, enthalpie) [2]. Attention, c'est une question difficile. En particulier : y a-t-il une ou plusieurs manières de réaliser ce cycle ? Est-ce que ce peut être un cycle simple, ou est-ce qu'il doit nécessairement s'auto-intersecter au moins une fois (cycle en forme de 8, c'est-à-dire équivalent à une juxtaposition de deux cycles) ?

Sources et références

- [1] D.J. BATHIEBO. Université de Ouagadougou, Burkina Faso. Et aussi A. LÉON, A.M. REYNORD, S. SAWADOGO, D. OUEDRAOGO, J. HOURÇOURIGARAY, Association « Burkin' Amitié », 07220 Saint Montan, France.
Adresse électronique : < aurelien.leon@gmail.com >
- [2] F. MARTIN. Le réfrigérateur. *Bulletin de l'Union des Physiciens*, volume 95, mars 2001, pages 531-550.
- [3] N. LUBICK. Desert Fridge: Cooling foods when there's not a socket around. *Scientific American*, volume 283, novembre 2000, page 26.
- [4] C. COHEN-TANNOUDJI. Principe du refroidissement évaporatif, 1996.
<<http://www.phys.ens.fr/cours/college-de-france/1996-97/12-11-96/page7.pdf>>.

Corrigé 14 Tenir des barres dressées avec un bout de doigt

(Énoncé à la page 27)

Première approche. Combien y a-t-il de degrés de liberté ? Il y a d'abord les trois coordonnées qui décrivent la translation du barycentre du stylo. Mais les deux quantités qui nous intéressent le plus sont les deux angles nécessaires pour décrire l'orientation du stylo. En effet, ce sont celles qui caractérisent l'oscillation (et la chute éventuelle) du stylo, soit d'avant en arrière, soit de droite à gauche.

Simplifications. Il suffit d'étudier ce qui se passe dans un plan vertical : on sent que, dans tout autre plan vertical, l'étude sera indépendante et aboutira rigoureusement à la même analyse physique. Contentons-nous donc de caractériser l'orientation du stylo par un seul angle, disons θ , avec la verticale, dans un plan fixe donné. On s'est donc ramené à un problème plan, dans lequel on notera (x, z) les coordonnées horizontale et verticale (voir figure 63).

► Question 14.1.

Mise en équations. Si le stylo est livré à lui-même, la question ne pose pas de difficulté particulière. C'est un problème à un degré de liberté, qui n'est visiblement pas dominé par des frottements : étudions donc son énergie mécanique (voir page 7). Pour cela, prenons un repère dont l'origine est son point de contact avec le doigt, qu'on peut noter O . L'énergie potentielle de pesanteur est donnée par la hauteur du barycentre G :

$$E_{\text{pot}} = mgz_G = mgl \cos \theta,$$

où m est la masse du stylo, $l = OG$ est la distance de G à l'extrémité du stylo. L'énergie cinétique de rotation est :

$$E_{\text{cin}} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2,$$

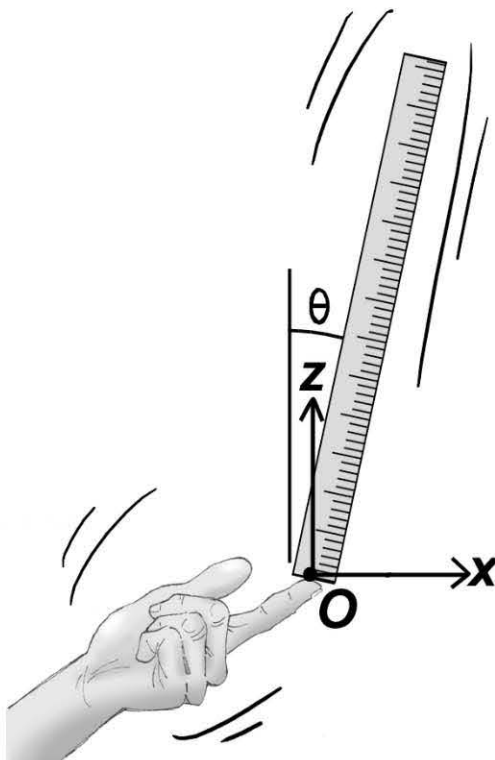


Figure 63 Notations pour décrire la règle.

Son barycentre G est situé à distance l de O , et donc à hauteur $z_G = l \cos \theta$ au-dessus de O .

où J est le moment cinétique du stylo par rapport à un axe horizontal passant par O . La conservation de l'énergie s'écrit donc :

$$mgl \cos \theta + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 = \text{constante}, \quad (149)$$

où la constante est par exemple mgl si on lâche le stylo à $\theta = 0$ sans vitesse initiale de rotation.

Résolution. On reconnaît que l'équation (149) est l'équation du pendule pesant. Les vérifications d'unité, de signe et de comportement se feront donc naturellement au fur et à mesure de la résolution. Attention cependant : puisque $\theta = 0$ correspond à un maximum local d'énergie potentielle, et non à un minimum, il s'agit du pendule pesant autour de sa position d'équilibre instable.

On connaît donc tout sur ce mouvement ; vous n'avez nul besoin de dériver l'équation (149), mais vous pouvez le faire si ça vous fait plaisir (voir page 7). Vous obtenez :

$$-mgl \sin \theta + J \ddot{\theta} = 0. \quad (150)$$

On voit apparaître la pulsation ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}. \quad (151)$$

L'équation (150) se réécrit donc simplement :

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta. \quad (152)$$

Le seul temps caractéristique du problème est l'inverse ω^{-1} de la pulsation, comme pour le pendule pesant.

La durée de chute est donc proportionnelle à ω^{-1} . Le facteur de proportionnalité dépend complètement des conditions initiales ; à la limite, si l'on a lâché le stylo extrêmement près de $\theta = 0$, le temps de chute peut être arbitrairement long (voir la figure 38). On ne peut donc pas donner ici de calcul exact de la durée de chute.

Simplifications. Près de l'équilibre instable ($|\theta| \ll 1$), on peut faire une approximation linéaire, $\cos \theta \approx \text{constante} - \theta^2/2$, et $\sin \theta \approx \theta$. Les équations (149) et (152) se ramènent donc respectivement à :

$$-\frac{1}{2} mgl\theta^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 = \text{constante},$$

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \theta. \quad (153)$$

Au voisinage de l'équilibre instable, ce mouvement est accéléré exponentiellement : θ croît comme $e^{\omega t}$. D'où une certitude : sensible à la moindre fluctuation, le stylo tombe nécessairement.

Valeurs numériques. Pouvez-vous estimer les ordres de grandeur ? On pourrait facilement estimer J et m (page 8). Ainsi, mon stylo de 14 cm de long doit avoir l de l'ordre de 7 cm, s'il est à peu près homogène. Avec 1 cm de diamètre, il a un volume d'environ $14 \text{ cm} \times \pi \times (1 \text{ cm})^2/4 \approx 10 \text{ cm}^3$, donc m de l'ordre de la dizaine de grammes (vérification : avec un pèse-lettres, je trouve 8 g). Le moment d'inertie du stylo en O serait, si le stylo était homogène :

$$J = \int_{r=0}^{2l} r^2 \times (m dr/2l) = 4ml^2/3,$$

soit de l'ordre de $2 \cdot 10^2 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Mais ces calculs sont inutiles ! En effet, seule compte la valeur de ω . Or, si on essaie de l'estimer, il est encore naturel de supposer que le stylo est à peu près homogène. L'équation (151) devient alors simplement :

$$\omega \approx \sqrt{\frac{3g}{4l}}.$$

La masse du sylo n'intervient pas du tout. On en tire que ω est de l'ordre de $[30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}/(4 \times 7 \cdot 10^{-2} \text{ m})]^{1/2}$, soit 10 s^{-1} .

Son inverse ω^{-1} est un temps caractéristique : c'est le temps de croissance de l'exponentielle. Il est de l'ordre du dixième de seconde, ce qui n'est pas absurde en comparant à ce qu'on observe.

► Question 14.2.

Analyse qualitative. En déplaçant votre doigt, vous changez la position du point de contact avec le stylo : $O = O(t)$. Or, le problème est invariant par translation du point O , et également invariant galiléen, donc insensible à la vitesse de O dans le référentiel terrestre. Seule peut jouer l'accélération de O dans ce référentiel : donnons-lui un nom, par exemple γ , qui est une fonction de variables qu'on précisera plus tard.

Il faut tenir compte de la force que votre doigt exerce sur le stylo. Il faut donc passer par les forces et non par l'énergie. Voulez-vous essayer une autre possibilité ? Alors passez dans le référentiel lié à votre doigt : mais comme il n'est plus galiléen, dans le repère Oxz il faut tenir compte de la « force » d'inertie, c'est-à-dire de γ . Vous n'avez donc rien gagné, pour l'instant. Tant qu'on n'a pas précisé γ , on n'a aucune raison de savoir si elle dérive d'un potentiel, et donc on doit écrire explicitement les forces.

Mise en équations. Alors, vaut-il mieux se placer dans le référentiel terrestre, ou dans celui lié à votre doigt ? Essayez de faire l'étude dans le référentiel terrestre : c'est possible, mais très lourd, Au contraire, dans le référentiel lié à votre doigt, c'est simple. Écrivez le moment de la « force » d'inertie pris en O , pour obtenir la correction à l'équation (152) :

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta - \frac{m\gamma l}{J} \cos \theta. \quad (154)$$

Vérifiez l'homogénéité : $m\gamma l/J$ est en $\text{kg} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m}/(\text{kg} \cdot \text{m}^2) = \text{s}^{-2}$, tout comme $\ddot{\theta}$ et ω^2 , ça va. Quelle expression de γ allez-vous choisir ?

- Un débutant pourrait tenter de déplacer sa main en gardant γ constante. Auquel cas il y a une solution d'équilibre, $\theta = \arctan(m\gamma l/J\omega^2)$. Mais cela pose deux difficultés. La première est d'ordre pratique ; c'est irréalisable d'accélérer ainsi constamment : puisque votre accélération serait de l'ordre de $\omega^2 l$, soit proche de g , vous iriez vous cogner contre le mur de votre chambre en une fraction de seconde. La seconde est théorique, puisque cela ne fait que déplacer le problème : ce nouvel angle d'équilibre, oblique, est tout aussi instable que $\theta = 0$ dans la question précédente.
- Deuxième tentative, on peut essayer de déplacer sa main avec une accélération qui est une fonction du temps, $\gamma = \gamma(t)$, par exemple une fonction sinusoïdale. Ce n'est guère mieux : $\theta = 0$ n'est même plus une solution.

Donc à la fin de ce second round, le stylo tombe toujours. Alors, comment s'en sortir ?

► Question 14.3.

Mise en équations. La solution est que notre œil et notre toucher épient le stylo en permanence. Selon que le stylo est en train de tomber à gauche ou à droite, notre réaction est différente. C'est ce que l'on appelle une rétroaction : nous détectons l'objet et agissons sur lui en conséquence. Le moyen le plus simple de le modéliser est d'écrire que γ est une fonction de θ . Dans un premier temps, pour comprendre physiquement l'effet de cette rétroaction, plaçons-nous dans une approximation linéaire, où la rétroaction est proportionnelle à l'angle :

$$\gamma = \text{constante} \times \theta. \quad (155)$$

En regardant les unités de l'équation (154), on constate qu'on peut écrire cette constante sous la forme kJ/ml , où k est une nouvelle constante qui a la dimension du carré d'une pulsation. L'équation (154) devient alors :

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta - k\theta \cos \theta. \quad (156)$$

Quel signe doit avoir k ? Pour compenser le moment du poids, il faut que votre doigt aille dans la direction où le crayon est en train de tomber. Il faut donc que k soit positif. On le vérifie en observant le membre de droite de l'équation (156) : un terme qui croît avec θ (tel que $\omega^2 \sin \theta$) est un terme déstabilisant, un terme stabilisant est un terme qui décroît avec θ . Pour bien rappeler le signe de k , on peut le noter sous la forme d'un carré. En l'occurrence, puisque k a la dimension du carré d'une pulsation, nous introduisons la notation $\Omega = \sqrt{k}$. L'équation (155) devient alors :

$$\gamma(\theta) = \Omega^2 \frac{J}{ml} \theta, \quad (157)$$

et l'équation (156) devient :

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta - \Omega^2 \theta \cos \theta. \quad (158)$$

Résolution.

- La position $\theta = 0$ est-elle toujours une position d'équilibre ? Oui. Pouvez-vous étudier la stabilité près de $\theta = 0$? Linéarisez l'équation (158) et vous obtenez, pour $\theta \ll 1$:

$$\ddot{\theta} \approx (\omega^2 - \Omega^2)\theta. \quad (159)$$

Pour discuter le comportement physique, il faut donc comparer les valeurs de ω et Ω :

- Si $\Omega < \omega$ on n'a rien gagné : θ augmente toujours exponentiellement ; il y a seulement un ralentissement, puisque le temps caractéristique est un peu plus grand : c'est désormais $(\omega^2 - \Omega^2)^{-1/2}$.
 - C'est $\Omega = \omega$ qui marque la limite entre les deux comportements possibles. D'après les équations (151) et (157), cela implique que γ , l'accélération (horizontale) de votre doigt, est de l'ordre de grandeur de g , l'accélération (verticale) de la pesanteur. En effet, dimensionnellement remarquez que g est la seule accélération dans le problème.
 - Si $\Omega > \omega$, que se passe-t-il ? En ce cas, la réaction suffit à stabiliser le mouvement, et on retrouve un mouvement harmonique autour de $\theta = 0$ avec une période $2\pi/\sqrt{\Omega^2 - \omega^2}$. Autrement dit, vous faites déjà mieux qu'un débutant, puisque le stylo ne tombe plus. Cependant, vous n'êtes pas encore un expert, puisqu'il oscille d'une façon que vous ne contrôlez pas particulièrement.
- Pouvez-vous étudier le mouvement complet, et pas seulement près de $\theta = 0$? L'équation (158) vous paraît rébarbative ? Regardez-la bien... Elle dérive d'un potentiel ! C'est l'avantage de la forme linéaire que nous avons choisie pour la rétroaction (équation (155)) : elle facilite bien les calculs et donc la compréhension. En effet, le membre de droite de l'équation (158) peut s'écrire comme $-V'(\theta)$, où $V'(\theta) = -\omega^2 \sin \theta + \Omega^2 \theta \cos \theta$ est la dérivée de $V(\theta)$:

$$V(\theta) = (\omega^2 + \Omega^2) \cos \theta + \Omega^2 \theta \sin \theta,$$

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + V(\theta) = \text{constante.} \quad (160)$$

L'équation (160) se ramène alors immédiatement à la conservation de l'énergie : toute l'information est contenue dans le potentiel V .

Graphique. On peut tracer ce potentiel V (voir la figure 64). On vérifie ainsi que pour $\Omega < \omega$ le point $\theta = 0$ est instable (ligne pointillée). Quand $\Omega = \omega$, il y a ce qu'on appelle une bifurcation. Pour $\Omega > \omega$, le point $\theta = 0$ est stable, et l'on découvre sur la figure deux nouveaux points instables, qui définissent la limite du bassin de stabilité de $\theta = 0$. Ces deux points sont à $\pm\theta^*$, solutions de l'équation $V' = 0$, soit $\Omega^2 \theta^* = \omega^2 \tan(\theta^*)$. Pour trouver θ^* par une solution graphique, on peut tracer $\Omega(\theta^*)$:

$$\Omega/\omega = \sqrt{\tan(\theta^*)/\theta^*}. \quad (161)$$

et ensuite, en échangeant les axes des abscisses et des ordonnées, son inverse $\theta^*(\Omega)$ (figure 65). On trouve que quand Ω croît de ω à l'infini, θ^* croît de 0 à $\pi/2$. Le portrait de phases, c'est-à-dire ici les trajectoires dans le plan $(\theta, \dot{\theta})$, a l'allure de celui du pendule pesant, voir la figure 66, tracée ici par exemple pour le cas où $\Omega = 2\omega$. Vous avez pu obtenir ce que vous vouliez, grâce à la dynamique : à la fin de ce troisième round, le stylo tient sans tomber.

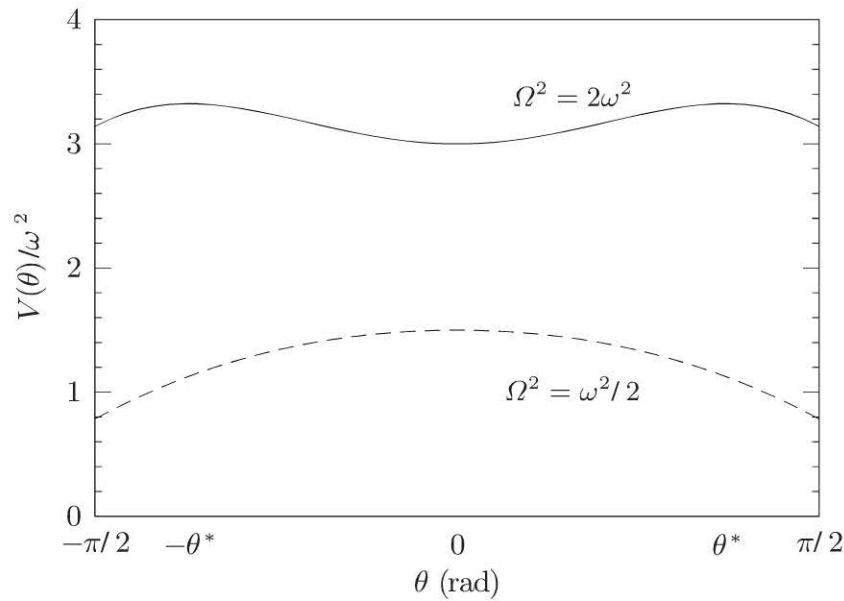


Figure 64 Potentiel effectif $V(\theta)$ qui décrit l'équation (160), tracé pour deux valeurs Ω .

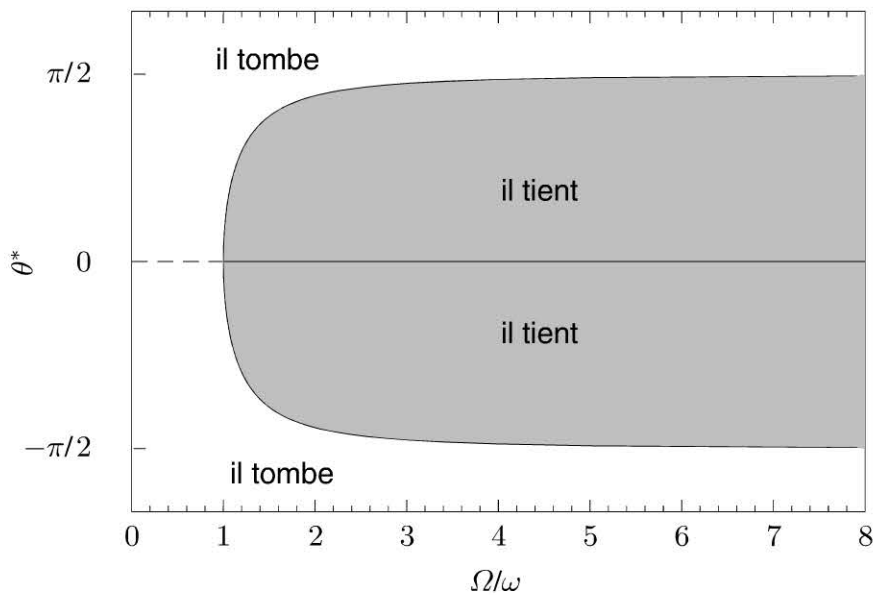


Figure 65 Tracé de l'équation (161), pour trouver graphiquement les positions stables $\pm\theta^*$ et les zones de stabilité de l'équation (160).

► Question 14.4.

Analyse qualitative. Ne vous réjouissez pas trop vite : en réalité, c'est un peu plus compliqué que cela. En effet, vous mettez naturellement un certain temps à réagir. Quand vous voyez la position $\theta(t)$, vous réagissez avec retard, donc à l'instant $t + \tau$. Autrement dit, votre réaction à l'instant t n'est pas fonction de $\theta(t)$, mais plutôt de $\theta(t - \tau)$, c'est-à-dire la position un peu de temps avant. La rétroaction (équation (155)) devient donc :

$$\gamma = \text{constante} \times \theta(t - \tau). \quad (162)$$

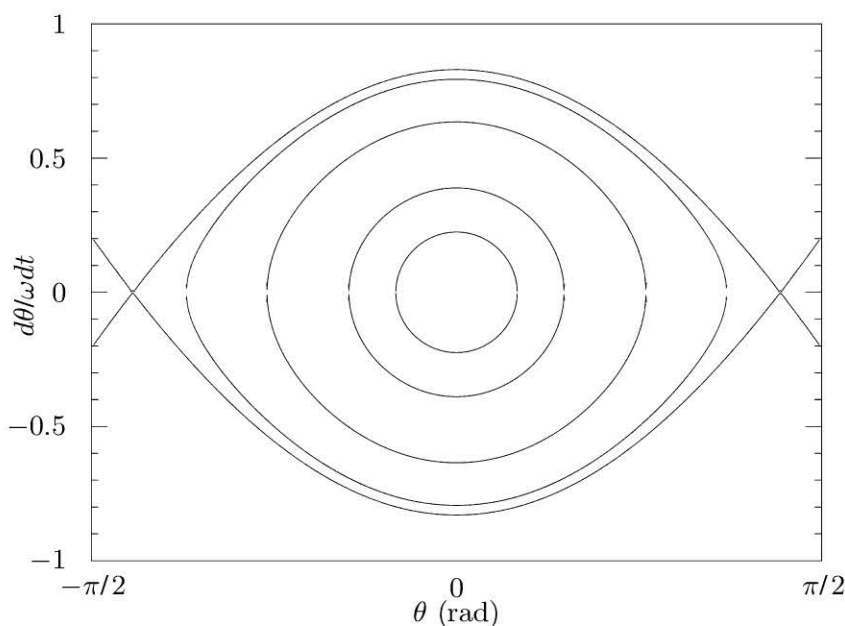


Figure 66 Portrait de phases, c'est-à-dire trajectoires dans le plan $(\theta, \dot{\theta})$, pour les solutions de l'équation (160).

On a choisi ici comme exemple $\Omega = 2\omega$. Les trajectoires sont périodiques.

Le cas stable correspond à un θ qui reste petit, donc sur le graphe ce sont les trajectoires qui se referment.

Combien vaut ce temps de délai ? L'article [1] se base sur $\tau = 0,1$ s d'après les mesures du temps que les coureurs olympiques mettent à réagir au signal de départ. C'est plutôt long, pour une course qui se joue au centième de seconde près. Est-ce court ou long pour quelqu'un qui veut faire tenir un stylo sur son doigt ?

Mise en équations. Le problème est de savoir si vous pouvez développer $\theta(t - \tau) \approx \theta(t) - \tau\dot{\theta}(t)$. Ici, l'échelle de temps de variation de θ est ω , donc θ est de l'ordre de $\omega\theta$. Donc, avec $\tau = 0,1$ s, le paramètre $\omega\tau$ du développement est de l'ordre de 1, et non pas tout petit. Conclusion : dans le présent problème, notre délai de réaction est loin d'être négligeable. Comment s'en sortir ? On est ici dans un cas typique d'approximation physique (page 4). Nous ferons ce développement en $\omega\tau$, même s'il n'est pas rigoureux, pour pouvoir comprendre l'essentiel de la physique.

Passez-vous par la force ou par l'énergie (voir page 7) ? Contrairement à l'équation (158), il n'y a plus de potentiel à utiliser. Il faut revenir à l'équation (154), qui se réécrit, au premier ordre en $\omega\tau$ (à partir de l'équation (162)) :

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta - \Omega^2 [\theta(t) - \tau \dot{\theta}(t)] \cos \theta.$$

Grâce à la notation Ω (page 154), il est facile de vérifier que tout ceci est bien homogène. Vous pouvez vous empresser de linéariser à nouveau, cette fois en faisant l'approximation $\theta \ll 1$:

$$\ddot{\theta} - \Omega^2 \tau \dot{\theta} + [\Omega^2 - \omega^2] \theta = 0. \quad (163)$$

Résolution. Cette équation linéaire du second ordre admet pour solution, lorsque $\Omega > \omega$, des oscillations.... qui s'amplifient toujours exponentiellement ! En effet, elles croissent comme :

$$e^{\frac{1}{2} \Omega^2 \tau}.$$

Le stylo tombe rapidement : en un temps de l'ordre de $(\Omega^2 \tau)^{-1}$, soit toujours de l'ordre du dixième de seconde, à peine le temps d'une oscillation.

Comme nous ne sommes pas parfaits, τ n'est jamais strictement nul, et ne sera pas plus petit que le dixième de seconde. Au mieux, nous pouvons imaginer qu'on arrive à rendre ω très grand (voir page 159 et « **Ouvertures** »), donc $\tau \ll \omega^{-1}$, ce qui rendrait encore plus valable notre développement en $\omega \tau$. Le stylo arriverait à réaliser plusieurs oscillations de temps caractéristique ω^{-1} pendant le temps de chute $(\Omega^2 \tau)^{-1}$, ce qui est déjà bien. Mais à la fin de ce quatrième round, le stylo tombe donc toujours.

► Question 14.5.

Analyse qualitative. Alors, comment procèdent les experts ? Une solution : anticiper. On ne peut pas prédire l'avenir, mais on peut détecter la dérivée (ou la dérivée seconde) de l'état du stylo.

Mise en équations. Quelle est la façon la plus simple d'écrire cette rétroaction (voir « **Notes** ») ? Par exemple sous une forme linéaire :

$$\gamma(\theta, \dot{\theta}) = \lambda \theta + \lambda' \dot{\theta},$$

où λ et λ' sont deux constantes. Pour assurer l'homogénéité, on introduira à nouveau la notation Ω^2 dans la première constante, ainsi qu'une fréquence notée ν dans la deuxième :

$$\gamma(\theta, \dot{\theta}) = \frac{J}{ml} (\Omega^2 \theta + \nu \dot{\theta}).$$

Passerez-vous par la force ou par l'énergie (voir page 7) ? Il n'y a toujours pas de potentiel à utiliser ; l'équation (154) se réécrit :

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin \theta - [\Omega^2 \theta(t) + \nu \dot{\theta}(t)] \cos \theta.$$

Résolution. Cette équation admet toujours la solution $\theta = \dot{\theta} = 0$, et comme précédemment elle se linéarise aux petits θ :

$$\ddot{\theta} + \nu \dot{\theta} + [\Omega^2 - \omega^2] \theta = 0, \quad (164)$$

donc l'amplitude des oscillations varie comme :

$$e^{-\frac{1}{2} \nu t}.$$

Cette fois, tout va bien, à condition que l'accélération du doigt soit proportionnelle à la vitesse angulaire de chute du stylo : il faut prendre ν positif, et même le plus grand possible. En effet, on peut tenir compte du retard comme ci-dessus : $\gamma = \gamma(\theta[t - \tau], \dot{\theta}[t - \tau])$, et le développement en τ donne maintenant :

$$(1 - \nu\tau)\ddot{\theta} + (\nu - \Omega^2\tau)\dot{\theta} + [\Omega^2 - \omega^2]\theta = 0. \quad (165)$$

Dans cette équation, comme dans l'équation (163), il faut discuter suivant le signe des coefficients. Si tous les coefficients sont positifs, on reconnaît un oscillateur amorti, et on sait que c'est stable : même si l'on part hors de $\theta = 0$, les oscillations finissent par disparaître et le stylo revient à l'équilibre.

Commentaire. Est-ce possible que tous les coefficients soient positifs en même temps ? Cette condition s'écrit sous la forme (visiblement homogène) :

$$1 > \nu\tau > \Omega^2\tau^2 > \omega^2\tau^2.$$

C'est possible si et seulement si $\omega\tau < 1$. Plus $\omega\tau$ est petit, plus c'est facile d'ajuster notre réaction (Ω et ν) pour satisfaire cette condition. Comment faire pour rendre $\omega\tau$ bien plus petit que 1 ?

- Rappelons que τ , c'est le retard de notre réaction ; avec un entraînement sportif intensif, on peut le ramener à un dixième de seconde. Malheureusement, il est souvent plus long ; ainsi, le temps de réaction d'un conducteur de voiture peut atteindre la seconde. C'est même parfois plus long encore, sous l'effet de l'alcool, la fatigue, les stupéfiants ou l'âge.
- D'un autre côté, ω est déterminé par la longueur de l'objet, ou plutôt la position de son barycentre. On a vu que, pour un stylo, ω est désagréablement grand. Or, c'est un paramètre qu'on peut diminuer sans problème. Pour un objet long d'au moins un mètre, ω approche de 1 s^{-1} , $\omega\tau \sim 0,1$ (et en ce cas notre développement limité est acceptable). Le diamètre de l'objet n'a aucune importance, sa densité non plus ; à condition que votre doigt tienne le coup : si l'objet est trop lourd, vous devrez employer toute la paume de votre main. En conclusion, vous pouvez facilement faire tenir verticalement un manche à balai, ou une longue règle de professeur.

Est-ce que tout ceci est conforme à votre expérience ?

Notes.

- Ce problème aborde successivement deux difficultés : l'analyse physique, pour poser les équations, et ensuite l'étude mathématique des solutions ; voir par exemple la référence [2].
- Avec une régulation simple, comme dans l'équation (155), on ne ramène pas vraiment le stylo à $\theta = 0$. Il ne s'agit pas réellement d'un équilibre. La question

n'est pas « le stylo est-il en équilibre stable » mais plutôt « l'amplitude des mouvements du stylo reste-t-elle limitée ? » On a ainsi, au 14.3, une bifurcation (du type appelé « bifurcation fourche » [1]) entre une situation complètement instable et une situation oscillante.

- Remarquez que nous n'avons pas inclus la dissipation. En effet, le stylo oscille très librement, avec un excellent facteur de qualité (page 10). Les frottements sur l'air sont bien trop faibles pour l'empêcher de tomber. Les frottements solides au point O sont très élevés, et essentiels pour tenir le stylo ; mais comme le stylo ne glisse pas, les frottements solides ne travaillent pas, donc ne dissipent pas d'énergie.
- De nombreux systèmes de régulation commerciaux, les PID (« proportionnel-intégrale-dérivée »), anticipent les variations de la quantité qu'ils régulent. Si vous voulez asservir une quantité physique x , utilisez une réaction de la forme $ax(t) + b \int x(t) dt + c\dot{x}(t)$. Le terme lié à l'intégrale sert à empêcher les dérives à long terme, qu'on n'a pas eu à considérer ici.

Ouvertures.

- Montrez que ce problème est équivalent à celui de la stabilité du monocycle dans le sens avant-arrière (on ne s'occupera pas de la chute sur le côté, qui est un problème voisin de celui du vélo normal). Quel est l'effet du pédalage ? Montrez que le débutant tombe tout de suite (14.1), qu'en s'entraînant on arrive à tenir (14.2 à 14.5), et qu'un expert peut faire des figures, comme de faire semblant de tomber et de se rattraper au dernier moment [1].
- Toujours dans l'équilibriste : étudiez la stabilité de la marche sur un câble. Les fildeféristes savent bien qu'un balancier horizontal grand de plusieurs mètres rend leur numéro, non seulement plus spectaculaire, mais aussi plus facile : expliquez pourquoi. Montrez qu'en fixant une masse à chaque bout du balancier, les fildeféristes gagnent sur deux plans. Tout d'abord, cela abaisse le centre de gravité. Ensuite, cela augmente le moment d'inertie. Ces deux effets contribuent à diminuer ω , ce qui leur laisse plus de temps pour réagir.
- Vous pouvez aussi réfléchir à des exemples de funambulisme plus compliqués, comme la personne debout sur une planche posée sur un cylindre ou un ballon (voir page 166).
- On peut poser d'autres problèmes où notre cerveau mesure une quantité et réagit. Un exemple : vous essayez de régler la température de votre douche, vous disposez d'un robinet d'eau froide et d'un d'eau chaude. Analysez les paramètres pertinents du problème et écrivez des équations. Montrez que, si vous ne connaissez pas bien la douche en question, vous oscillez un bon nombre de fois entre « trop chaud » et « trop froid » avant d'atteindre la température idéale. Au contraire, une fois que vous avez pris l'habitude de cette douche, vous êtes capable d'anticiper : vous atteignez plus facilement le bon réglage. Si vous pouvez

diminuer la longueur du tuyau séparant le robinet du jet (par exemple en commutant de la position « douche » à la position « bain »), vous réglez sans problème. Enfin, si vous avez la possibilité de prendre un bain (et non une douche), dont la température est liée à l'intégrale de tout ce que vous avez versé dedans, tout devient facile.

Sources et références

- [1] R.C. JOHNSON. Unicycles and Bifurcations. *American Journal of Physics*, volume 66, 1998, pages 589-592.
- [2] F. GRANER. *Petits problèmes de physique – première partie*. Springer, Heidelberg, 1998. Exercices 12, 16 et 23

Corrigé 15 Évitez de trop gros coups dans les bonds

(Énoncé à la page 28)

Première approche. Ne vous précipitez surtout pas pour calculer scolairement l'équation du mouvement ! Rappelez-vous d'abord quelle est la question posée, et demandez-vous alors : comment caractériser un ressort ? Un ressort a deux propriétés essentielles, sa longueur au repos et sa raideur. Laquelle est la plus importante ici ? Sa raideur, bien sûr.

Plus précisément, est-ce que la longueur au repos a un rôle ? Les deux ressorts sont antagonistes, quand on comprime l'un on étend l'autre. On les choisit identiques. Quelle que soit la longueur au repos de l'un des ressorts pris isolément, quand on les met tous deux ensemble la balançoire revient à l'horizontale, par symétrie. En résumé, pour l'instant ne vous occupez pas de la longueur au repos, et quand vous en serez aux équations, rappelez-vous de vérifier qu'elle ne joue pas (voir page 164).

Le problème consiste donc à choisir la raideur la meilleure possible. Que veut dire ici « meilleure » ? Réfléchissons. Il existe des balançoires à deux places sans ressort du tout, ce qui prouve que les ressorts ne sont pas strictement obligatoires. Le rôle du ressort est sans doute d'améliorer la sécurité, le confort et le plaisir du jeu. Essayez de vous imaginer quels seraient les inconvénients si les ressorts étaient vraiment très, très mous ? Et s'ils étaient vraiment très, très durs ? La balançoire serait-elle confortable ? Alors, quel critère fixerez-vous, pour déterminer la gamme acceptable, puis pour sélectionner le meilleur confort ? Le problème est-il lié à l'amplitude du mouvement, ou à sa fréquence ? Est-il lié aux forces, aux moments ou à l'énergie ?

Analyse qualitative : amplitude ou fréquence ? Examinons d'abord le cas où les ressorts sont vraiment très, très mous. Que se passe-t-il ? Ils ne jouent aucun rôle : c'est comme s'il n'y avait pas de ressort du tout. On est alors ramené à la balançoire

à deux places traditionnelle, qui a deux petits inconvénients en terme de confort et de sécurité. Tout d'abord, à chaque fois qu'un enfant descend, il se cogne les fesses par terre, le choc le secoue. Ensuite, si le plus lourd des deux enfants est facétieux, il peut se bloquer en position basse, contraignant l'autre à rester en haut, les jambes gigotant dans l'air. Conclusion : il est agréable d'avoir des ressorts assez raides pour ramener la balançoire vers l'horizontale.

Ensuite, examinons le cas où les ressorts sont vraiment très, très raides. Les enfants ont beau gigoter en tout sens, la barre reste à peu près horizontale : on ne peut plus appeler ça une balançoire ! Conclusion : les ressorts doivent être assez mous pour permettre aux enfants de faire osciller la barre.

Le critère porte donc probablement sur l'amplitude du mouvement. L'optimum est atteint si l'amplitude du mouvement du bout de la barre est comparable à sa distance au sol : ni beaucoup plus grande, ni beaucoup plus petite.

Et la fréquence du mouvement, alors ? Est-elle importante ? Je ne sais pas. Ce n'est pas vraiment un élément de confort. Une fois qu'on aura choisi la raideur des ressorts, la conséquence est certes que la balançoire aura une fréquence propre d'oscillation. Sa valeur pourra constituer un test de nos calculs (voir page 165), plutôt qu'un critère de choix à part entière. En effet, la fréquence propre est celle que prendrait la balançoire si les enfants étaient passifs, alors qu'en pratique ils sont actifs et fixent eux-mêmes la fréquence d'oscillation.

Analyse qualitative : forces, moments ou énergies ? Si l'on souhaite que le bout de la barre vienne au voisinage du sol, faut-il écrire une condition sur les forces, les moments ou l'énergie ? On peut envisager trois critères possibles :

- 1) La force des jambes : quand un enfant est seul sur la balançoire, en arrivant en bas il pousse sur ses jambes. Il faut qu'il fournisse une force raisonnable pour remonter. Les ressorts lui soulagent une part raisonnable de son effort, si leur moment est comparable à celui des jambes de l'enfant.
- 2) L'énergie : avec le travail que fournissent les jambes de l'enfant, il faut pouvoir fournir une énergie qui permette une oscillation avec l'amplitude voulue. On peut la calculer quand l'énergie cinétique est nulle, toute l'énergie est sous forme potentielle élastique du ressort (si l'énergie potentielle de pesanteur est constante voir page 164), donc quand le bout de la barre est près du sol.
- 3) Le moment du poids : quand les deux enfants montent sur une balançoire au repos, elle s'équilibre. L'un des enfants peut la mettre en mouvement en se reculant. Ainsi, le moment de son poids devient supérieur à celui de l'autre enfant. Si l'augmentation de moment ainsi créée est supérieure au moment de rappel des ressorts en position inclinée, cela suffit à faire descendre la balançoire jusqu'au sol.

Voyons ce que deviennent ces trois critères si on les exprime quantitativement.

Notations et valeurs numériques. Prenons les notations de la figure 67, et estimons des valeurs typiques. Pas besoin d'être extrêmement précis : on ne cherche

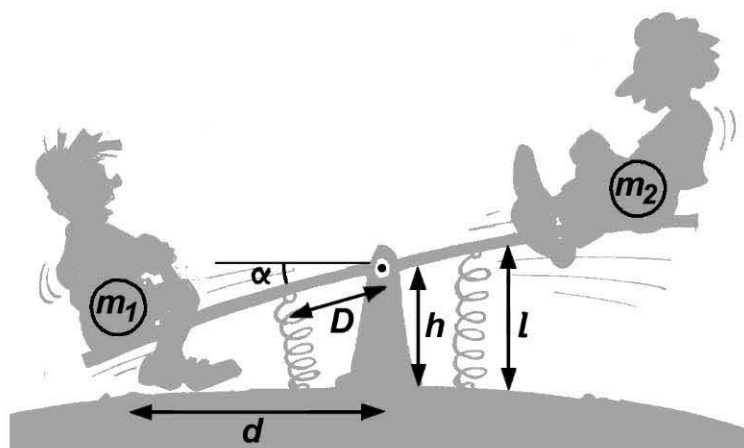


Figure 67 Notations.

pas une valeur exacte, mais plutôt une gamme de valeurs telles que la balançoire soit acceptable pour des petits et des grands enfants, voire des adultes.

L'ordre de grandeur de la masse m des enfants est 25 kg, soit un poids de 250 N. Leurs jambes développent sans difficulté de quoi soulever quelques kilogrammes, soit quelques 10 N. Chaque enfant est situé à une distance d de l'axe qui vaut environ 2 m et qu'il peut faire varier d'une dizaine de centimètres. Notons k la raideur d'un ressort, et δl son élongation par rapport à sa longueur au repos ; la valeur exacte de sa longueur au repos n'intervient pas, voir page 164. Chaque ressort fournit une force de module $k \delta l$; donc l'ensemble des deux ressorts fournit $2k \delta l$. Les ressorts sont situés à distance $D \approx 1$ m de l'axe. Quand un bout de la barre touche le sol, la longueur des ressorts a varié de δl_{\max} qui est de l'ordre de $h/2 \sim 50$ cm, l'un en extension, l'autre en compression.

- Le critère de la force des jambes s'écrit : $2k \delta l_{\max} \times 1 \text{ m} \approx 10 \text{ N} \times 2 \text{ m}$, soit $k \sim 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.
- Le critère de l'énergie (travail fourni) s'écrit : $1/2(2k) \delta l_{\max}^2 \times 1 \text{ m} \approx 10 \text{ N} \times 0,5 \text{ m}$, soit $k \sim 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.
- Le critère du moment du poids s'écrit : $(2k) \delta l_{\max} \times 1 \text{ m} \approx 250 \text{ N} \times 0,1 \text{ m}$, soit $k \sim 25 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.

On répond donc à l'énoncé en recommandant de choisir une raideur de quelques dizaines de $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$.

Commentaires. Sans se forcer, on trouve à peu près la même valeur selon les trois critères. C'est un coup de chance.

En manipulant la balançoire, comment pouvez-vous estimer à la main si cette valeur est raisonnable ? Appuyez sur la balançoire avec la main, au-dessus d'un ressort, et estimez la force que vous devez fournir pour que la longueur de chaque ressort varie de 10 cm. Est-ce qu'elle est de l'ordre de quelques newtons, c'est-à-dire la force qu'il faut pour soulever quelques centaines de grammes ? En réalité les ressorts sont probablement plus raides que cela, voir page 165.

Remarquons qu'un critère sur la fréquence de la balançoire procéderait d'un raisonnement fondamentalement différent. En effet, ce calcul devrait tenir compte d'autres quantités physiques, comme la masse de la barre de la balançoire. On peut très bien la calculer, et vérifier qu'on trouve une période conforme à notre expérience. Cela vous permettra au passage d'étudier l'équation du mouvement de la balançoire, pour que vous fassiez quand même quelques calculs avant de quitter cet exercice...

Mise en équations. Pour le plaisir, puisque l'énoncé ne le demande pas, cherchons donc la période des oscillations. Pour cela, est-il essentiel de tenir compte des frottements ? Non, cela ne jouera pas sur la période. En effet, une balançoire correcte a un bon facteur de qualité, voir page 10 : si vous la lâchez, elle oscille avant de s'arrêter, plusieurs fois (certes, peut-être pas autant de fois qu'une balançoire normale à une place, qui a un facteur de qualité de plusieurs dizaines : ici, le ressort contribue à dissiper peu à peu l'énergie).

Combien de degrés de liberté ? Un seul : l'angle α de la barre avec l'horizontale. Pas d'hésitation : passons par l'énergie (page 7). Trois contributions, cinétique, potentielle de pesanteur, potentielle élastique :

$$E = \left(m_1 + m_2 + \frac{M_b}{3}\right) \frac{\dot{\alpha}^2 d^2}{2} + (m_2 - m_1)gd \sin \alpha + 2 \frac{kD^2 \sin^2 \alpha}{2}, \quad (166)$$

Ici, on a pris la position horizontale ($\alpha = 0$) comme référence de l'énergie potentielle ; on a utilisé le moment d'inertie de la barre, $J_b = M_b d^2/3$; on a mesuré d le long de la balançoire (c'est équivalent de le mesurer horizontalement, comme sur la figure 67, auquel cas $d \sin \alpha$ devient $d \tan \alpha$: cela ne change rien dans la suite).

On a ici toute l'information, et on pourrait tracer le portrait de phases de cette énergie, c'est-à-dire les trajectoires dans le plan $(\alpha, \dot{\alpha})$, si l'on voulait tout savoir sur le mouvement.

Commentaires. La longueur au repos des ressorts n'ajoute qu'un terme constant à l'énergie potentielle élastique :

$$(l_0 + D \sin \alpha)^2 + (l_0 - D \sin \alpha)^2 = 2l_0^2 + 2(D \sin \alpha)^2.$$

Comme on l'a mentionné pages 161 et 163, elle ne joue donc aucun rôle.

Le terme d'énergie potentielle de pesanteur peut être incorporé dans le dernier terme, qui devient $kD^2(\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha_0) + \text{constante}$, où $\sin \alpha_0 = (m_1 - m_2)gd/2kD^2$. Le déséquilibre des masses, $m_1 - m_2$, n'a donc aucun rôle, à part décaler l'angle d'équilibre. Si les deux masses sont égales, $m_1 = m_2$, le barycentre est fixe, et donc le terme correspondant de l'énergie potentielle de pesanteur disparaît complètement.

Simplifications et résolution. Avons-nous besoin, et avons-nous le droit, de linéariser le problème ? Oui, car on cherche la période des oscillations. Elle dépend de

l'amplitude, mais peu : il est bien plus simple, et tout aussi utile compte tenu de la précision que nous recherchons, de passer en linéaire, $\sin \alpha \sim \alpha$, en s'intéressant au voisinage de l'équilibre.

D'après l'équation (166) linéarisée, la pulsation ω des petites oscillations s'exprime comme pour un oscillateur harmonique, et dépend de la moyenne des deux masses, $m = (m_1 + m_2)/2$:

$$\omega = \sqrt{\frac{2kD^2}{(m_1 + m_2 + M_b/3)d^2}} = \frac{D}{d} \left[\frac{k}{m + \frac{M_b}{6}} \right]^{1/2}. \quad (167)$$

Vérification : est-ce homogène ? Oui, visiblement, cette expression a la même dimension que $\sqrt{k/m}$, qui est bien une pulsation.

Ordres de grandeur. Estimez la pulsation propre ω pour la valeur de k trouvée ci-dessus, soit quelques dizaines de $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$. Pour cela, il faut estimer la masse M_b de la barre. Comme il est difficile de la peser, évaluez son volume (voir page 8). Si c'est une poutre en bois dur, de section $10 \times 10 \text{ cm}^2$, de longueur $2d = 4 \text{ m}$, son volume est de $(0,1 \text{ m})^2 \times 4 \text{ m} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$, donc $M_b \approx 40 \text{ kg}$. Si c'est un tube d'acier, de diamètre extérieur 5 cm, de diamètre intérieur 4 cm, de longueur $2d = 4 \text{ m}$, son volume est de $2\pi \times 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \times 10^{-2} \text{ m} \times 4 \text{ m} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, donc $M_b \approx 50 \text{ kg}$. On trouve alors, pour une poutre en bois comme pour un tube d'acier, une masse de 40 à 50 kg, et donc $\omega \approx 2 \times (40 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}/65 \text{ kg})^{1/2} = 0,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Si on laisse la balançoire osciller sans personne dessus, la masse est divisée par quatre, donc $\omega = 0,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

En réalité les balançoires ont une période propre qui est plutôt de l'ordre de $T \leq 6 \text{ s}$, donc $\omega \geq 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. La raideur k choisie par les constructeurs de balançoire, probablement après différents essais, est donc peut-être 40 ou 50 $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$. C'est cohérent avec ce qu'on estime en pressant le ressort à la main, voir page 163. Les critères que j'ai proposés correspondent donc à des ressorts un peu trop souples.

Notes. Cet exercice est un bon test pour savoir si l'on a bien digéré l'oscillateur harmonique. Sur ce principe, on peut étudier des balançoires similaires. Promenez-vous dans des parcs publics, vous découvrirez des balançoires à ressort de formes variées. Certaines n'ont même pas d'axe fixe : en plus du tangage, on a ainsi un très léger mouvement de roulis.

Ouvertures.

- Étudiez ce qui se passe si les enfants se rejettent en arrière à tour de rôle, ce qui fait varier dans le temps la position d'équilibre. Écrivez proprement les équations, et expliquez comment ils font ainsi entrer la balançoire en résonance.

- Analysez comment procèdent les funambules debout sur une planche posée sur un cylindre ou un ballon : pour se maintenir debout, ils font porter leur poids alternativement sur une jambe ou sur l'autre. Ce problème étant horriblement compliqué, si vous voulez le comprendre il faut le simplifier. Par exemple, commencez par étudier la planche posée sur le cylindre qui roule, mais sans personne dessus. Ou bien, pour éviter que la planche ne roule sur le cylindre, collez-les ensemble. Ou encore, prenez un cylindre de rayon tout petit, ou même fixe. Dans chacun de ces cas, déterminez précisément le nombre de degrés de liberté, puis décidez si vous utilisez l'énergie ou les forces.

Corrigé 16 L'art des vis qui savent pomper (Énoncé à la page 29)

► Question 16.1.

Première approche. Peut-il s'agir d'une situation dynamique ? Autrement dit, est-ce qu'il faut tourner très très vite pour faire bondir l'eau jusqu'en haut ? Certainement pas ; mieux vaudrait prendre de l'eau dans un seau et la lancer de toutes ses forces vers le haut, le rendement serait meilleur !

C'est bien de la statique. En général, le principe d'une pompe est de forcer l'eau à aller dans un seul sens, sans lui permettre de revenir en arrière. Cela peut se faire par exemple avec des valves anti-retour. Ici, qu'est-ce qui joue ce rôle ?

Analyse qualitative. Si l'axe de l'hélice était vertical, toute l'eau contenue dans l'hélice s'écoulerait inmanquablement vers le bas, et on aurait échoué. Si l'axe de l'hélice était horizontal, le tuyau pourrait contenir de l'eau, mais elle resterait toujours à la même hauteur. Entre ces deux extrêmes, si l'axe est incliné d'un certain angle, qu'est-ce qui se passe ? Le tuyau peut contenir un peu d'eau, car il présente des creux : ce sont des minima locaux de la hauteur (voir la figure 68). Comment faire monter cette eau ?

Regardez ce qui se passe si vous tournez l'hélice autour de son axe, avec une vitesse de rotation ω dans le sens indiqué sur la figure 68. En bas de l'hélice, le tuyau puise de l'eau et son premier creux se remplit. Au fur et à mesure qu'on tourne, le premier creux monte progressivement. Au bout d'un tour, il a pris la place qu'occupait le creux précédent. Le creux continue à monter peu à peu, et l'eau qu'il contient monte avec lui. Finalement, le creux disparaît en haut du tuyau. L'eau se déverse alors dans la cuvette supérieure (voir la figure 17).

Pendant ce temps, le bas du tuyau passe à chaque tour dans une position où il peut se remplir. À chaque tour, il prélève donc un peu d'eau qui va être montée dans un nouveau creux.

► Question 16.2.

Analyse quantitative. Appelons α l'angle d'inclinaison de l'axe de l'hélice par rapport à la verticale z (voir la figure 68), et $V(\alpha)$ le volume d'eau que contient

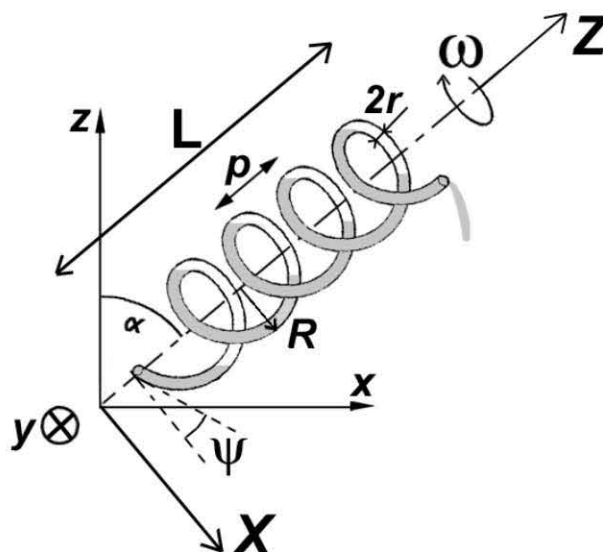


Figure 68 Notations pour la vis d'Archimède.

L'hélice est vue ici en perspective exagérée ; si on la regardait de profil, on verrait en réalité une sinusoïde (équations (172), (174), (175), (176)). Chaque creux est en équilibre, avec le même niveau d'eau à droite et à gauche. Seul le dernier creux est soumis à un déséquilibre (exagéré sur le dessin) et s'écoule.

chaque creux. Suite à l'analyse ci-dessus (question 16.1), vous pouvez déjà affirmer que $V(0) = 0$ et que V augmente toujours quand α augmente (voir figure 71). L'hélice fait un tour en un temps $T = 2\pi/\omega$: pendant ce tour, le volume $V(\alpha)$ a avancé le long de l'axe de l'hélice d'une distance p qui est le pas de l'hélice. D'où le débit de la pompe : l'eau arrive en haut à raison d'un débit D (en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$) :

$$D = \frac{V(\alpha)}{T} = \frac{V(\alpha)\omega}{2\pi}. \quad (168)$$

Il en ressort que D augmente toujours quand α augmente. Faudrait-il pour autant coucher l'hélice sur le côté ($\alpha = \pi/2$) ? Certainement pas, car en ce cas on pomperait de la gauche vers la droite, mais pas vers le haut.

Alors, si ce n'est pas le débit, quelle est la quantité importante qu'il faut maximiser ? C'est la quantité d'eau qu'on monte par seconde en s'opposant à la gravité. C'est donc une puissance : l'énergie potentielle gagnée par seconde. Comme, en un tour, on monte l'équivalent d'un volume d'eau V sur une hauteur $L \cos \alpha$, où L est la longueur de l'hélice, la puissance de pompage \mathcal{P} (exprimée en watt) vaut :

$$\mathcal{P}(\alpha) = \rho_e g L \cos \alpha D(\alpha) = \rho_e g L \cos \alpha \frac{V(\alpha)\omega}{2\pi}. \quad (169)$$

Si vous préférez, écrivez que le nombre de creux est L/p , et qu'en un tour, chaque creux a monté de $p \cos \alpha$: vous retrouvez bien l'équation (169).

Vérifications.

- L'homogénéité est correcte, puisque le membre de droite est en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m} \times \text{m}^3 \times \text{s}^{-1} = \text{W}$.
- Signe : rien à dire, tout est positif.
- Comportement : comme prévu ci-dessus, $\mathcal{P}(0) = \mathcal{P}(\pi/2) = 0$; par conséquent, on peut espérer trouver un compromis optimum pour α , situé quelque part entre 0 et $\pi/2$; c'est-à-dire déterminer la valeur α qui maximise $\mathcal{P}(\alpha)$. Pour cela, il vous faut d'abord calculer $V(\alpha)$, le volume d'eau que contient un creux.

Simplifications. Pour faciliter les calculs, on peut proposer deux simplifications :

- Bien qu'on ne puisse pas à proprement parler d'un problème statique, vous pouvez supposer qu'on est « quasi-statique » : on tourne, mais ω est assez lent pour qu'on puisse négliger tous les termes inertiels. À tout moment, vous pourrez donc faire comme si vous étiez en hydrostatique.
- Supposez que le rayon r du tuyau est assez fin, $r \ll R$ et $r \ll p$. Cela permettra de simplifier considérablement le calcul géométrique de $V(\alpha)$. En effet, dans cette approximation, $V(\alpha)$ vaut la section πr^2 du tuyau, multipliée par la longueur l du creux, voir figure 68 :

$$V(\alpha) = \pi r^2 l(\alpha). \quad (170)$$

Il s'agit d'une approximation physique (voir page 4). Ce n'est certainement pas vrai dans la réalité, car cela voudrait dire que la pompe aurait une contenance (et donc une puissance) très réduite.

Notations. On verra au fur et à mesure des calculs que ce n'est pas si simple de choisir de bonnes notations. On peut proposer par exemple celles de la figure 68. Le tuyau s'enroule en une hélice de rayon R , et de pas p . De façon équivalente, on peut définir son angle d'hélicité ψ :

$$\tan \psi = \frac{p}{2\pi R}. \quad (171)$$

L'angle ψ ainsi défini varie entre 0, pour une hélice aplatie en un cercle, et $\pi/2$, pour une hélice étirée en ligne droite. Il caractérise donc la forme de l'hélice.

Mise en équations. Avec les simplifications ci-dessus, on s'est donc ramené à un problème purement géométrique, qui consiste à calculer la longueur l de chaque creux. Il faut d'abord écrire l'équation de l'hélice, ce qu'on va faire en plusieurs étapes :

- Quelle serait l'équation de l'hélice si elle était verticale ? On l'écrit sous forme paramétrique, dans un repère (X, Y, Z) lié à son axe :

$$\begin{aligned} X &= R \cos \theta, \\ Y &= R \sin \theta, \\ Z &= R \theta \tan \psi, \end{aligned} \quad (172)$$

où le paramètre θ est l'angle polaire dans le plan (X, Y) . Je pense avoir écrit les signes pour avoir une hélice qui s'enroule comme un tire-bouchon droit (si je me suis trompé, ce n'est pas grave). La longueur d'un morceau de tuyau compris entre les angles θ et $\theta + \delta\theta$ est :

$$\delta l = \delta\theta \sqrt{R^2 + R^2 \tan^2 \psi} = \frac{R\delta\theta}{\cos \psi}. \quad (173)$$

- Quelle est donc l'équation de l'hélice inclinée ? Comme l'axe de l'hélice est incliné d'un angle α par rapport à la verticale, son équation dans le repère dessiné sur la figure 68 devient, en essayant de ne pas se tromper dans les signes :

$$x = R \cos \theta \cos \alpha + R\theta \tan \psi \sin \alpha, \quad (174)$$

$$y = R \sin \theta, \quad (175)$$

$$z = -R \cos \theta \sin \alpha + R\theta \tan \psi \cos \alpha. \quad (176)$$

Quand l'hélice tourne autour de son axe, la longueur du creux ne change pas : on la calcule donc à $t = 0$. Si vous vouliez l'équation de l'hélice au temps t , ce qui est inutile ici, il faudrait remplacer θ par $\theta - \omega t$ dans ces trois équations (174), (175) et (176).

- Comment varie z avec θ (voir la figure 69) ? D'abord, la fonction $z(\theta)$ augmente avec θ . Ensuite sa dérivée $z' = dz/d\theta$ s'annule en θ_1 , et z commence alors à diminuer. En θ_2 , sa dérivée z' s'annule à nouveau, et z recommence à monter.
- Alors, comment pouvez-vous déterminer la longueur du creux ? Le début du creux est situé en θ_1 , défini ci-dessus comme le premier point où $z'(\theta)$ s'annule. La fin du creux est en θ_3 , qui est défini par la condition d'équilibre de l'eau : le niveau d'eau est à la même hauteur en θ_3 qu'en θ_1 (voir figures 68 et 69). C'est pour pouvoir écrire cela qu'on a supposé l'équilibre hydrostatique (voir page 168). Le creux va donc de θ_1 à θ_3 définis par :

$$\begin{aligned} z'(\theta_1) &= 0, \\ z(\theta_3) &= z(\theta_1). \end{aligned} \quad (177)$$

La longueur de l'abscisse curviligne entre θ_1 et θ_3 s'obtient en intégrant l'équation (173) :

$$l(\theta_1, \theta_3) = R \frac{\theta_3 - \theta_1}{\cos \psi}, \quad (178)$$

donc le volume qu'on cherche est donné par les équations (170) et (178) :

$$V(\alpha) = \pi r^2 R \frac{\theta_3(\alpha) - \theta_1(\alpha)}{\cos \psi}. \quad (179)$$

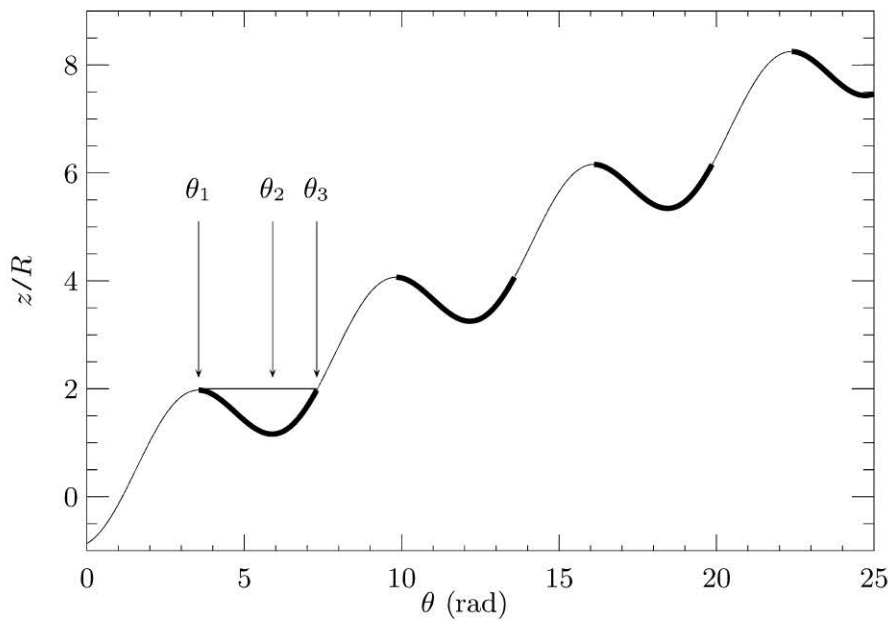


Figure 69 Graphe de la fonction $z(\theta)$, représentant la hauteur des points de l'hélice (équation (176)), tracée ici avec $\alpha = \pi/3 = 1,05$ rad et $\psi = \arctan(2/3) = 0,59$ rad. Les creux sont dessinés en traits épais.

Résolution. Pour chaque valeur donnée de l'angle α , il ne reste donc plus qu'à déterminer les valeurs de θ_1 , puis θ_3 , définis par l'équation (177). L'équation (176) donne la dérivée de z :

$$z'(\theta) = +R \sin \theta \sin \alpha + R \tan \psi \cos \alpha. \quad (180)$$

Elle s'annule en deux valeurs θ_1 et θ_2 , respectivement inférieure et supérieure à $3\pi/2$, représentées sur les figures 69 et 70, définies par :

$$\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2) = -\frac{\tan \psi}{\tan \alpha}. \quad (181)$$

Les autres solutions, c'est-à-dire les autres creux, s'en déduisent en ajoutant un multiple de 2π . Ces solutions existent si et seulement si $-\tan \psi / \tan \alpha > -1$, c'est-à-dire si :

$$\alpha > \psi. \quad (182)$$

On vérifie ce qu'on attendait : quand α est trop petit, l'hélice ne peut retenir de l'eau. L'équation (182) donne sa valeur minimale : la condition pour qu'il existe un creux est que α soit plus grand que ψ , qui est donné par la construction de l'hélice. Cela se comprend bien en regardant la figure 68.

On en déduit alors θ_3 par l'équation (177) :

$$-R \cos(\theta_3) \sin \alpha + R \tan \psi \theta_3 \cos \alpha = -R \cos(\theta_1) \sin \alpha + R \tan \psi \theta_1 \cos \alpha. \quad (183)$$

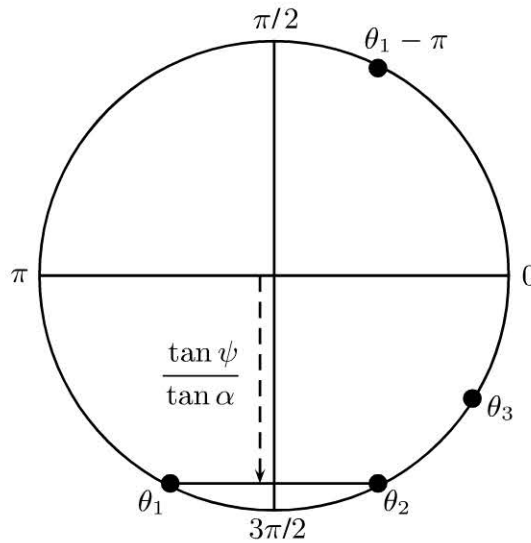


Figure 70 Détermination graphique de θ_1 et θ_2 : on trace un cercle de rayon 1.

Pour continuer les calculs analytiques le plus loin possible (voir « **Ouvertures** »), on aimerait utiliser non pas θ_3 , un peu lourd ; mais plutôt θ_2 , facile à calculer. En regardant la figure 69, on peut proposer l'approximation suivante, grossière mais intuitive :

$$\theta_3 - \theta_2 \approx \theta_2 - \theta_1. \quad (184)$$

Or $\theta_2 - \theta_1$ est calculable analytiquement (voir la figure 70) :

$$\begin{aligned} \theta_2 - \theta_1 &= 2 \left(\frac{3\pi}{2} - \theta_1 \right) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - [\theta_1 - \pi] \right), \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\tan \psi}{\tan \alpha} \right) = 2 \arccos \frac{\tan \psi}{\tan \alpha}. \end{aligned} \quad (185)$$

Regroupement. En rassemblant les équations (179), (184) et (185) on trouve alors $V(\alpha)$ (voir figure 71) :

$$V(\alpha) \approx 2\pi r^2 R \frac{\theta_2(\alpha) - \theta_1(\alpha)}{\cos \psi} = \frac{4\pi r^2 R}{\cos \psi} \arccos \frac{\tan \psi}{\tan \alpha}. \quad (186)$$

Finalement, en regroupant les équations (169) et (186), on trouve l'expression de la puissance de pompage $\mathcal{P}(\alpha)$ qu'on cherche à optimiser :

$$\mathcal{P}(\alpha) = \mathcal{P}_0 \frac{\cos \alpha}{\cos \psi} \arccos \frac{\tan \psi}{\tan \alpha}, \quad (187)$$

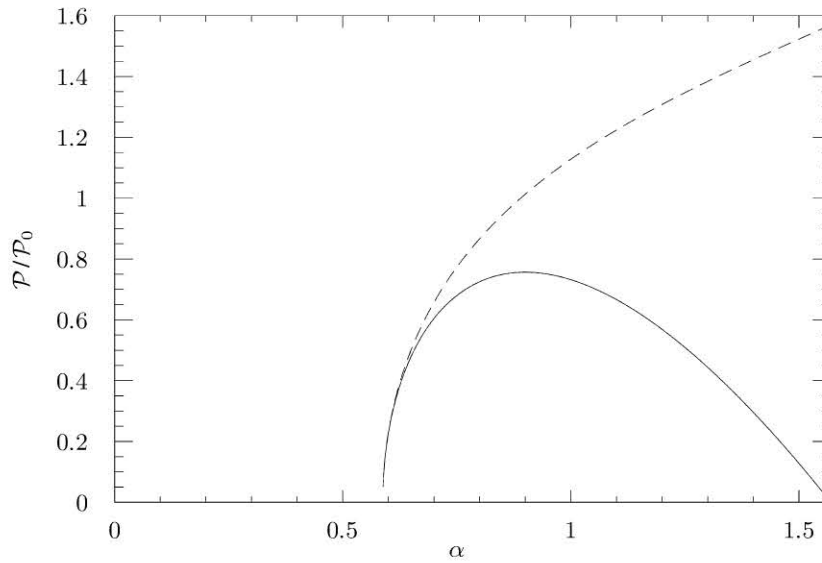


Figure 71 $\mathcal{P}/\mathcal{P}_0$, tracé d'après l'équation (187). On a pris la même valeur de ψ que sur la figure 69 : $\psi = \arctan(2/3) = 0,59$ rad. On trouve un maximum d'environ 0,76 pour $\alpha \approx 0,9$ rad. À titre indicatif, on a tracé en pointillé la fonction $V/V_0 = \arccos(\tan \psi / \tan \alpha)$ (équation (186)) : elle n'admet pas d'extremum.

où l'on a noté \mathcal{P}_0 le préfacteur défini par :

$$\mathcal{P}_0 = 2r^2 R \rho_e g L \omega. \quad (188)$$

Si vous tracez l'allure de $\mathcal{P}/\mathcal{P}_0$, vous trouvez l'angle α optimum ; c'est lourd analytiquement, mais simple par ordinateur (voir la figure 71).

Vérifications.

- Homogénéité : $r^2 R \rho_e$ est une masse, donc $r^2 R \rho_e g L$ une énergie. Comme ω est une fréquence, \mathcal{P}_0 est bien homogène à une puissance (équation (188)).
- Signe : Comme α varie entre 0 et $\pi/2$, ou plus précisément entre ψ et $\pi/2$, son cosinus reste positif, donc le volume et la puissance aussi (équations (186), (187)).
- Comportement : \mathcal{P}_0 augmente avec ω et les dimensions L , r et R de l'hélice : comme on s'y attend, plus l'hélice est grande et tourne vite, plus le pompage est efficace. Par ailleurs, on vérifie aussi que la variation avec α est bien celle qu'on attend : \mathcal{P} est nul pour $\alpha \leq \psi$, puis augmente avec α , passe par un maximum, et diminue pour s'annuler à nouveau en $\alpha = \pi/2$.

Ordres de grandeur. Évaluez un ordre de grandeur typique de \mathcal{P}_0 ; pour une vis d'Archimède de démonstration, prenez L de l'ordre du mètre, r de l'ordre du centimètre, R du décimètre, et ω du $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$:

$$\mathcal{P}_0 \sim (10^{-2})^2 \times 10^{-1} \times 10^3 \times 10 \times 1 \times 1 = 10^{-1} \text{ W}.$$

Cette puissance est adaptée pour une démonstration. Pour une application pratique, il faut obtenir une puissance significative : on augmente les dimensions.

Notes.

- Ce principe est extrêmement simple. L'avantage est qu'il n'y a pas de hauteur limite : si l'on est capable de construire une pompe très haute elle fonctionnera toujours. Dans la noria d'un puits, le principe est presque le même : en bas, on remplit l'un après l'autre des godets ; on les monte pour les déverser en haut.
- Par comparaison, les pompes qui fonctionnent en aspirant l'eau ont l'avantage d'avoir beaucoup moins de frottements mécaniques, donc un meilleur rendement et une possibilité d'être plus puissantes. En revanche, dans ces pompes, ce qui fait monter l'eau, c'est la différence entre P_{atm} et la pression P dans la pompe. Si $P > 0$, cette différence $P_{\text{atm}} - P$ est au maximum de 1 bar, ce qui correspond à une dizaine de mètres d'eau (voir page 286). Ces pompes ne peuvent donc pas dépasser une dizaine de mètres de dénivellation. C'est paraît-il à la demande de puisatiers toscans que Torricelli s'est intéressé à cette question, puis à la pression atmosphérique.

Ouvertures.

- Comme on connaît θ_1 par l'équation (181), utilisez l'équation (183) pour trouver θ_3 numériquement par ordinateur.
- Comment construiriez-vous l'hélice pour optimiser la puissance $P(\alpha)$ (équations (187) et (188)) ? Autrement dit, comment choisiriez-vous ψ ? Attention : le pas de l'hélice doit être supérieur ou égal à $2r$, sinon le tuyau s'auto-intersecterait.

Corrigé 17 En face des lames vibrantes (Énoncé à la page 30)

► Question 17.1.

Simplifications. Que cherchez-vous ? À étudier les mouvements de chaque portion de la règle, qui est déformable. On peut proposer par exemple les simplifications suivantes, d'ailleurs exactement les mêmes que pour un objet tendu :

- On traite un objet homogène.
- On ne s'occupe pas du poids, on le néglige devant les forces internes. En effet, si l'objet était très mince et non tendu, il serait visiblement courbé sous l'effet de la gravité, même au repos ; au contraire, si l'objet est épais ou tendu, qu'il soit horizontal ou vertical, on voit bien que sa forme est indépendante de la gravité.
- Les déformations sont « petites » : petites devant quoi ? Il est difficile de le préciser, pour l'instant. En attendant, on ne perdra probablement pas beaucoup de la physique en supposant que tous les angles sont petits devant 1, les rayons de courbure bien plus grands que l'objet (la règle ne se plie pas autant que du papier)

et les mouvements de la matière quasiment verticaux. Cela nous permettra de linéariser toutes les équations.

► Question 17.2.

Analyse qualitative. Le système a l'air conservatif : il oscille bien, avec un bon facteur de qualité (voir page 10). Les frottements jouent donc un rôle secondaire dans le problème : il est judicieux de les négliger. Il y a vraisemblablement une énergie potentielle dans ce problème, d'origine élastique, qui ramène la règle vers sa position d'équilibre non déformée ; cette énergie potentielle se convertit en énergie cinétique, et réciproquement.

À ce stade, il n'est pas facile de trouver intuitivement l'expression de cette énergie. Un réflexe tentant consisterait à caractériser la forme de la règle par un seul nombre, par exemple la hauteur y de son extrémité, ou l'angle θ de sa tangente : cela permettrait d'écrire que l'énergie est y^2 ou θ^2 multiplié par une constante. Mais attention : cette constante de proportionnalité dépend de l'étude détaillée du mouvement, et on sera incapable d'écrire de quoi elle dépend tant qu'on n'aura pas achevé l'étude du problème. On serait également dans l'impossibilité d'écrire l'expression de l'énergie cinétique (qui doit intégrer les mouvements de chaque point, et non seulement l'extrémité), et donc de discuter la période des oscillations.

Considérons donc plutôt les forces intérieures. Un élément de volume exerce sur son voisin un moment M et une force, qui se décompose en deux composantes :

- L'une est parallèle à l'axe de la règle. Cette tension semble peu importante (contrairement au cas de la corde tendue) ; on précisera cette intuition au 17.3.
- L'autre est perpendiculaire à l'axe de la règle. On l'appelle « tranchante » et on la note T (voir la figure 72). Ici, elle est essentielle (alors qu'elle ne l'est pas dans le cas de la corde tendue, qui est mince, voir page 180).

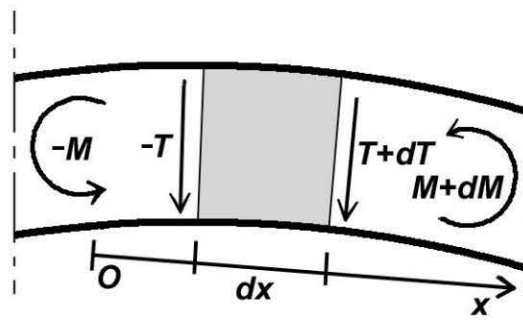


Figure 72 Conventions de signe pour les forces et moments exercés sur l'élément grisé par ses voisins.

À gauche, l'élément grisé subit $-T$ et $-M$ (si l'on note T et M ce qu'il exerce sur son voisin de gauche). À droite, il subit $T + dT$ et $M + dM$. Pour alléger le schéma, on n'a pas représenté les composantes parallèles à la règle, c'est-à-dire à l'axe x (qui n'est pas nécessairement horizontal).

► Question 17.3.

Notations. On s'intéresse au mouvement de chaque point de la règle, pour trouver sa forme $y(x, t)$. On considère un élément de volume de section S , longueur dx , masse volumique ρ . On peut choisir les conventions de signe comme on veut : celles de la figure 72 me paraissent pratiques.

Mise en équations. Pour cet élément de volume, le principe fondamental de la dynamique donne trois informations :

- En projection horizontale : comme on a dit que le mouvement est vertical (voir 17.1), il n'y a pas d'accélération horizontale. En projetant horizontalement, on trouve donc que l'élément de volume est soumis à la même force horizontale à gauche (x) et à droite ($x + dx$). Donc la composante parallèle de la force est constante et uniforme tout le long de la règle. Mais ici (contrairement à la corde tendue) cette constante est... nulle, puisqu'on ne tire pas horizontalement aux deux extrémités. La force n'a donc ici aucune composante parallèle, voir le 17.2.
- En projection verticale : l'information est plus riche. On peut écrire :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x + dx) - T(x) = dT. \quad (189)$$

- Enfin, en rotation : c'est un peu subtil. On va écrire que la variation du moment cinétique vaut la somme des moments. Le membre de gauche est proportionnel au moment d'inertie de l'élément de volume, donc à $dm dx^2$. Au premier ordre en dx , il est donc nul. Le membre de droite, écrit au premier ordre en dx , est : $dM - T dx$. L'équation du moment cinétique s'écrit donc, au premier ordre en dx :

$$0 = dM - T dx. \quad (190)$$

► Question 17.4.

Analyse qualitative. Pour fermer le système d'équations (189) et (190), il faut maintenant trouver le moment M des forces intérieures en fonction de la forme de la règle. Or M est un terme élastique qui doit ramener la règle à sa forme de départ :

- Est-ce qu'il peut dépendre de y ? Certainement pas, car le problème est invariant par translation : si je me contente de soulever en bloc la règle et de la déplacer de, disons, 10 cm, je change y , mais je n'induis pas de moment.
- De même, M ne peut pas dépendre de l'orientation de la règle : comme le problème est invariant par rotation, si je me contente de tourner la règle en bloc et de changer son angle avec l'horizontale, je n'induis pas de moment ; donc M ne dépend pas de $\partial y / \partial x$.
- Peut-il alors dépendre de la courbure $\partial^2 y / \partial x^2$? Certainement : en essayant de courber la règle je sens bien qu'elle résiste. En effet, la partie concave de la règle est comprimée, la partie convexe est étirée (voir la figure 72).

En linéarisant pour simplifier, on écrira donc que M est proportionnel à $\partial^2 y / \partial x^2$. Quel signe faut-il mettre ? Regardez les conventions de signe de la figure 72. La courbure est ici négative, $\partial^2 y / \partial x^2 < 0$, tandis que $M > 0$. D'où finalement :

$$M = -\mathcal{E} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (191)$$

Quelle est la dimension de la constante \mathcal{E} ? Le moment M est en $\text{N} \cdot \text{m} = \text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, donc \mathcal{E} est en $\text{N} \cdot \text{m}^2 = \text{J} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ (voir « Notes »).

► Question 17.5.

Mise en équations. En rassemblant les équations (189-191), on trouve finalement l'équation complète pour $y(x, t)$:

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\mathcal{E} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}. \quad (192)$$

Le terme moteur (le membre de droite) est une dérivée quatrième : c'est un peu difficile à comprendre intuitivement, mais on le discutera au 17.6. Commentons brièvement son signe : si avec votre main vous abaissez le bout libre de la règle, autrement dit si la dérivée quatrième de y est négative, vous créez un rappel qui fait remonter la règle vers l'horizontale, donc une accélération positive.

Remarquez que pour une corde tendue, le terme moteur est plus simple à comprendre : c'est une dérivée seconde, $\partial^2 y / \partial x^2$. Si la corde est incurvée, la composante parallèle à la corde produit une résultante nette directement liée à la courbure, et la corde bouge dès qu'on la lâche : elle n'est en équilibre que si elle est droite. Au contraire, si vous tenez une règle par les deux bouts, vous pouvez la maintenir courbée : elle reste alors immobile et garde une forme parabolique (sa dérivée quatrième étant nulle).

L'équation (192) est linéaire : la solution générale est la somme de solutions particulières, qu'on peut écrire en séparant les variables :

$$y(x, t) = y_0 f(x) g(t),$$

où f et g sont deux fonctions sans dimension. L'équation (192) se réécrit :

$$\rho S f(x) \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = -\mathcal{E} g(t) \frac{d^4 f(x)}{dx^4}. \quad (193)$$

Donc on peut faire passer la dépendance en t à gauche, la dépendance en x à droite. Puisque ces deux termes sont égaux, aucun d'eux ne peut dépendre ni de x ni de t ; donc ils sont nécessairement tous deux constants :

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = -\frac{\mathcal{E}}{\rho S} \frac{1}{f} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} = \text{constante.} \quad (194)$$

Comme on le verra ci-dessous (voir « **Vérifications** »), cette constante s'exprime en s^{-2} et elle est négative. On la note donc sous la forme $-\omega^2$, et on réécrit l'équation (194) :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}}{\rho S} \frac{d^4 f(x)}{dx^4} &= \omega^2 f, \\ \frac{d^2 g(t)}{dt^2} &= -\omega^2 g. \end{aligned} \quad (195)$$

Vérifications.

- Le terme spatial est homogène à des $\text{kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ divisés par des $(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}) \times (\text{m}^2) \times (\text{m}^4) = \text{kg} \cdot \text{m}^3$, donc il s'exprime en s^{-2} . Le terme temporel aussi, donc tout va bien.
- Le terme temporel doit bien avoir un signe négatif : physiquement, il s'agit d'oscillations sinusoïdales dans le temps, et non de croissance ou décroissance exponentielle. En revanche, à ce stade, il est difficile de vérifier le signe du terme spatial.
- Le comportement semble correct : plus la règle est molle (\mathcal{E} faible) ou lourde (ρ élevé), plus elle oscille lentement (ω faible).

Résolution. La partie temporelle est simple. Elle est de la forme $g(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$. Il faut deux conditions initiales. On peut choisir judicieusement l'origine des temps ; par exemple, si on lâche la règle sans vitesse initiale, on prend $B = 0$. On écrit alors finalement $y = y_0 f(x) \cos(\omega t)$, ce qui revient à avoir pris $A = 1$, autrement dit on a incorporé le préfacteur A dans y_0 ou dans $f(x)$, sans perdre d'information.

L'essentiel est en fait d'étudier la partie spatiale $f(x)$. Allons-y. On trouve des solutions exponentielles en e^{kx} , où k est solution de :

$$k^4 = \frac{\rho S \omega^2}{\mathcal{E}}.$$

Il y a donc quatre valeurs possibles pour k :

$$k = \alpha, i\alpha, -\alpha, -i\alpha,$$

$$\alpha = \left(\frac{\rho S \omega^2}{\mathcal{E}} \right)^{1/4}. \quad (196)$$

D'où la forme des solutions :

$$f(x) = C \sin(\alpha x) + D \cos(\alpha x) + E \sinh(\alpha x) + F \cosh(\alpha x).$$

Comme les valeurs de C , D , E et F sont indépendantes, il faut 4 conditions aux limites pour les déterminer.

► Question 17.6.

Conditions aux limites. Les conditions aux limites spatiales fixent les valeurs possibles de α , donc de ω . Seules certaines valeurs de ω sont observées (comme pour les cordes vibrantes) : ce sont les « modes propres » qu'on observe spontanément quand on laisse la règle vibrer toute seule. C'est ce qu'on entend en frappant une lame de balafon (lame tenue aux deux bouts) ou de mbira (lame tenue à un seul bout), qui est aussi le cas du plongeur de natation après que le nageur a sauté (figure 18).

Les conditions aux limites spatiales sont variées. Pouvez-vous les interpréter ? Elles peuvent porter :

- sur y , si l'on fixe la position d'une des extrémités ;
- sur $\partial y / \partial x$, si l'on fixe son orientation ;
- sur $\partial^2 y / \partial x^2$, si l'on y fixe le moment (équation (191)) ;
- sur $\partial^3 y / \partial x^3$, si l'on y fixe la force tranchante (équation (190)) ;
- ou sur n'importe quelle combinaison de ces dérivées.

On peut et on doit imposer au total quatre conditions, par exemple deux conditions à chacun des deux bouts. Ainsi, sur la figure 18, au bord de la table la règle est maintenue complètement fixe, alors $y = \partial y / \partial x = 0$. L'autre bout est libre, il n'y a ni moment ni force, $M = T = 0$, donc $\partial^2 y / \partial x^2 = \partial^3 y / \partial x^3 = 0$. Parmi les conditions possibles, il y en a une autre qui est simple, celle où l'objet est juste posé sur un point d'appui : à cet endroit, y est fixé, et il n'y a aucun moment, $M = 0$, donc $\partial^2 y / \partial x^2 = 0$. En y réfléchissant, on finit par trouver naturel qu'il y ait quatre conditions aux limites (au lieu de deux pour la corde tendue), donc à accepter l'idée que l'équation (192) fasse intervenir une dérivée quatrième.

Chacune de ces conditions détermine les valeurs possibles de C , D , E , F et α , donc de ω : elle correspond à un son différent. Prenons par exemple la figure 18. Au

point au bord de la table, qu'on notera $x = 0$, la condition d'encastrement $y = \partial y / \partial x = 0$ impose les relations :

$$C + E = D + F = 0. \quad (197)$$

À l'autre bout, qu'on notera $x = L$, la condition libre $\partial^2 y / \partial x^2 = \partial^3 y / \partial x^3 = 0$ impose les relations :

$$\begin{aligned} -C \sin(\alpha L) - D \cos(\alpha L) + E \sinh(\alpha L) + F \cosh(\alpha L) &= 0, \\ -C \cos(\alpha L) + D \sin(\alpha L) + E \cosh(\alpha L) + F \sinh(\alpha L) &= 0. \end{aligned} \quad (198)$$

Si l'on résout le système des équations (197) et (198), on trouve la condition sur α :

$$1 + \cos(\alpha L) \cosh(\alpha L) = 0. \quad (199)$$

► Question 17.7.

Résolution. Les solutions de l'équation (199) sont des valeurs discrètes : $\alpha L = a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$. C'est la liste des nombres a_i qui donne les valeurs possibles de ω , par l'équation (196) :

$$\omega_i = \frac{a_i^2}{L^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{\rho S} \right)^{1/2}, \quad (200)$$

Inversement, si on sait estimer les a_i et mesurer expérimentalement les ω_i , on peut en déduire \mathcal{E} , qui est une propriété de la règle :

$$\mathcal{E} = \rho S \frac{\omega_i^2}{a_i^4} L^4. \quad (201)$$

Valeurs numériques. Commençons par trouver les valeurs des a_i (équation (199)) :

- Vous pouvez vous contenter d'estimer leur ordre de grandeur, en supposant que a_1 est de l'ordre de l'unité.
- Vous pouvez aussi rechercher les a_i graphiquement en traçant la courbe $\cos a \cosh a$ en fonction de $a = \alpha L$.
- Si vous avez accès à un outil de calcul, vous pouvez trouver les a_i numériquement, et vous obtiendrez :

$$a_1^2 \approx 3,5, \quad a_2^2 \approx 22, \quad a_3^2 \approx 62, \quad \dots$$

On constate que les fréquences propres de vibration ne sont pas espacées avec régularité (contrairement à la corde tendue, dont les vibrations sont dites « harmoniques »).

Ensuite, pour les ω_i , ce qu'on sait mesurer et évaluer facilement en pratique, c'est la pulsation ω_1 , celle du mode le plus lent (le « fondamental »). Elle est un peu plus rapide qu'une seconde dans le cas d'une règle, un peu plus lente pour un plongeur.

Enfin, utilisons ces valeurs pour estimer \mathcal{E} , en injectant a_1 et ω_1 dans l'équation (201). En prenant pour ordre de grandeur $\rho \sim 10^3 \text{ kg}$, $S \sim 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$, $\omega_1 \sim 10 \text{ s}^{-1}$, $L \sim 0,2 \text{ m}$, on trouve :

$$\mathcal{E} \sim 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}.$$

Ouf ! L'unité est juste (voir page 176).

Commentaire. La fréquence de vibration est très sensible à la longueur libre, puisqu'elle varie comme L^{-2} (équation (200)) : vérifiez-le en manipulant la règle, en la tenant à des endroits différents. La largeur ne joue pas : c'est normal, si l'on met deux règles côte-à-côte, elles vibrent à la même fréquence ; cela ne change pas si on les attache ensemble pour former une seule règle deux fois plus large. Le matériau joue probablement un rôle essentiel, un peu par sa densité (ou plutôt *via* ρS , qui est sa masse par unité de longueur), mais surtout par sa rigidité. L'épaisseur joue aussi probablement un rôle essentiel, puisqu'un objet épais et un objet mince se comportent différemment ; mais à ce niveau il est difficile d'en dire plus (voir « Notes »).

Rappelons que dans une corde vibrante aussi, on choisit d'abord son matériau et ses dimensions. Ainsi, dans un instrument à cordes, les cordes les plus aiguës sont les plus fines et les plus courtes. Mais ensuite, on peut les accorder précisément en jouant sur un dernier paramètre, qui est la tension : plus la corde est tendue, plus le son est aigu. Un instrument à peau aussi peut être accordé en modifiant sa tension.

Notes. La constante \mathcal{E} est en fait le produit de deux quantités, l'une « très grande », l'autre « très petite » :

- La première ne dépend que du matériau. Appelée « module d'Young », c'est un module élastique qui caractérise la rigidité intrinsèque du matériau. Elle s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, c'est-à-dire en pascals. Pour des solides usuels, elle vaut de l'ordre des gigapascals (10^9 Pa), ce qui implique qu'un solide ne se déforme pas sous l'effet de la pression atmosphérique (10^5 Pa).
- Au contraire, l'autre terme ne dépend que de la forme de l'objet. C'est son « moment quadratique » : il varie comme l'épaisseur au cube multipliée par la largeur. Pour une règle d'un millimètre d'épaisseur et d'un cm de large, il vaut quelques 10^{-12} m^4 . Pour une corde mince, ce terme est encore plus petit, de plusieurs ordres de grandeur : en conséquence, dès que la corde est un peu tendue, le membre de droite de l'équation (192) devient négligeable devant le terme de tension (voir page 174).

Ouvertures. Vous pouvez traiter d'autres cas, par exemple :

- Pour une barre posée sur deux points d'appui, on trouve $\sin(\alpha L) = 0$, soit $\alpha_i L = i\pi$.

- Pour une barre maintenue encastrée à ses deux bouts, on trouve $1 - \cos(\alpha L) \cosh(\alpha L) = 0$, et c'est un peu plus compliqué.
- On pourrait imaginer de fixer $dy/dx = 0$ sans fixer y , mais ce n'est guère réalisé en pratique.
- Plus intéressant : le cas du plongeur avant que le nageur a sauté, c'est-à-dire une barre soumise à une force appliquée perpendiculairement à son extrémité. Calculez de combien s'abaisse l'extrémité, c'est-à-dire $y(L)$, et son angle, $dy/dx(L)$. Montrez qu'ils sont à peu près proportionnels à la force appliquée ; déduisez-en que la règle ou le plongeur se comporte comme un élastique. Trouvez une méthode pour déterminer l'énergie élastique imaginée au 17.2.
- Avec une main, tenez horizontalement une règle, l'autre bout étant libre. Montrez que, si la règle est plus courte qu'une certaine longueur (qui dépend de la valeur de \mathcal{E}), elle reste rigide et horizontale ; au contraire, si elle est plus longue, elle ploie sous son propre poids et son bout libre s'incline.
- Étudiez la forme d'une étagère de bibliothèque qui ploie sous le poids des livres ; pensez à tenir compte de la gravité, et de la masse de livres par unité de longueur.
- On peut encore généraliser à d'autres situations. Ainsi, on peut également « tendre » la règle en la tirant à chaque bout. En ce cas on doit combiner à la fois le cas « épais » dominé par les forces tranchantes et les moments, et le cas « tendu » où intervient la composante parallèle. Pensez aux objets verticaux assez longs pour que le poids intervienne, comme de hautes cheminées d'usines ou les armatures de gratte-ciel.

Corrigé 18 Tourniquez, c'est dément ! (Énoncé à la page 31)

Analyse qualitative. Reprenez une par une les questions sur les oscillateurs de la page 9. Il y a tout d'abord celles auxquelles on peut répondre facilement :

- Y a-t-il une source d'énergie extérieure, ou est-ce une oscillation libre ? Il s'agit d'une oscillation libre.
- S'agit-il d'oscillations autour d'un seul état d'équilibre stable (ce qui permet des oscillations harmoniques), d'un état d'équilibre instable (l'oscillation tendra à s'amplifier) ou bien une oscillation entre deux états limites non stables (oscillations de relaxation) ? Un équilibre stable, celui où la balançoire est déroulée.
- Combien y a-t-il de degrés de liberté indépendants ? Un seul, le degré d'enroulement. On ne s'occupe pas ici du balancement, car il est découplé de l'enroulement.
- Si vous lancez l'oscillation librement, est-ce qu'elle va s'amortir tout de suite (facteur de qualité inférieur à 1), s'amortir en quelques coups (facteur de qualité un peu supérieur à 1), ou osciller de nombreuses fois (ce qui permet de mesurer à l'œil le facteur de qualité) ? Le facteur de qualité est assez mauvais, disons un peu plus grand que 1 (voir « Notes »).

- Que cherchez-vous à étudier : la période des oscillations et l'équation du mouvement (auquel cas il est souvent préférable d'étudier l'énergie), ou bien avez-vous besoin de calculer en détails les forces ? On cherche uniquement la période des oscillations autour d'un état stable, et on a un seul degré de liberté : il faut écrire l'énergie plutôt que les forces (voir « **Ouvertures** »). Le système n'a pas un très bon facteur de qualité, comme on vient de le dire, donc il n'est pas exactement conservatif : ce n'est pas très grave, pas besoin de tenir compte des pertes pour calculer la période.
- Peut-on étudier complètement le mouvement, c'est-à-dire la vitesse ou la position en fonction du temps ? Peut-on aussi tracer et discuter physiquement le « portrait de phases », c'est-à-dire par exemple la vitesse en fonction de la position ? L'énoncé ne demande rien de tout ça, mais ce sera facile si l'on arrive à écrire correctement l'énergie.

Il y a ensuite les questions qui paraissent plus difficiles :

- Comment le rappel dépend-il de la déformation ? Le rappel est-il constant, est-il singulier, est-il proportionnel à la déformation (oscillateur harmonique), est-il une fonction compliquée de la déformation (oscillateur non-linéaire) ? C'est tout le problème ici.
- Est-ce une oscillation périodique ? Si oui, pouvez-vous identifier pourquoi il y a une période bien définie ? Là encore, on touche un point sensible. C'est un mouvement périodique, mais la période semble dépendre beaucoup de l'amplitude : plus on enroule la balançoire, plus elle met de temps à se dérouler, donc plus la période est longue. On voit déjà que ce n'est pas du tout un oscillateur harmonique.
- Qu'est-ce qui contrebalance le rappel, permettant de donner naissance à des oscillations : est-ce l'inertie ? Est-ce que l'énergie se convertit alternativement entre deux formes, par exemple potentielle et cinétique ? Pour l'énergie cinétique, pas de problème, on est en rotation autour d'un axe vertical fixe, l'inertie est donc caractérisée par le moment d'inertie.

En revanche, y a-t-il une énergie potentielle ? C'est une question essentielle ; elle va vous aider à aborder le problème. Essayez d'imaginer s'il peut y avoir une énergie potentielle élastique ou de pesanteur.

Est-ce que les cordes de balançoire sont élastiques ? Non. On ne ferait pas des cordes en caoutchouc : il faut éviter que l'enfant qui se balance n'aille cogner contre le sol ou valser dans le décor. Les cordes sont choisies dans un matériau très inextensible : par exemple du chanvre, ou du nylon rigide. Prenez deux cordes de balançoire, et entortillez-les : elles se redressent avec peine. Elles n'arriveront pas à s'entortiller en stockant de l'énergie, puis à se détortiller, puis à se rentortiller dans l'autre sens, de manière à produire des oscillations. Leur élasticité de torsion fournit un couple insuffisant pour expliquer ce qu'on observe (figure 19).

En revanche, la pesanteur représente une forme d'énergie potentielle pertinente, voir équation (213). En effet, quand vous enroulez la balançoire, vous faites cer-

tainement varier la hauteur. Pouvez-vous comprendre pourquoi ? Manipulez, manipulez ! Avez-vous trouvé le paramètre important ? C'est l'épaisseur de la ficelle, notée e sur la figure 73.

Mise en équations : géométrie. Nous pouvons donc maintenant passer au stade quantitatif. Il faut relier la hauteur h de la balançoire et l'enroulement θ (voir la figure 73). Cela devient un problème de géométrie. Visiblement, h est reliée à φ , mais comment relier φ et θ ? Écrivons les relations géométriques une par une :

- Quand on tourne θ , qu'il passe de 0 à 2π , le nombre de tours passe de n à $n + 1$, donc :

$$n = \frac{\theta}{2\pi}. \quad (202)$$

Notez que rien n'oblige à prendre n entier : dans la suite, on prendra n réel (voir les équations (5-7)). En revanche, comme l'énoncé parle d'une balançoire bien entortillée, on se place pour l'instant dans le cas $\theta \geq \pi$, $n \geq 1/2$; pour l'autre cas, voir « Ouvertures ».

- Il y a une condition géométrique sur la planche de la balançoire :

$$\tan \varphi = \frac{l}{2a}. \quad (203)$$

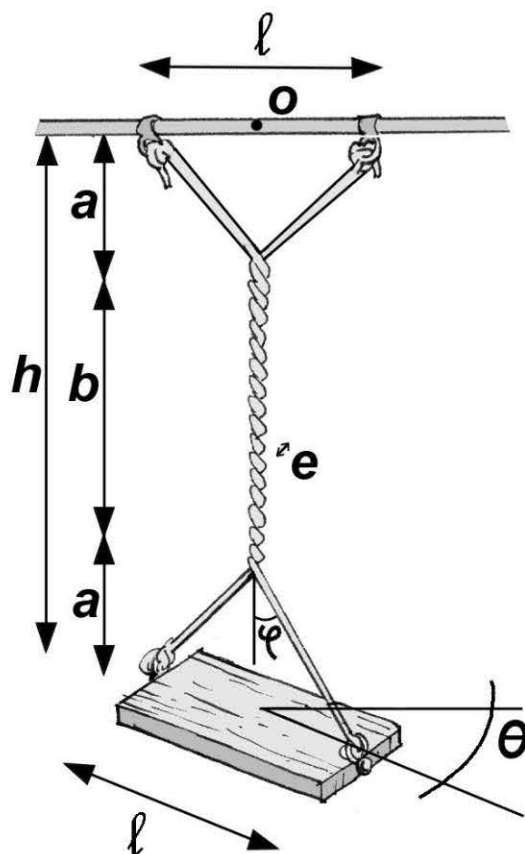


Figure 73 Notations.

- Il y a également une condition sur la hauteur totale :

$$h(\theta) = 2a + b. \quad (204)$$

Ici, on a écrit $2a$ en supposant, comme sur la figure 73, qu'il y a le même a en haut et en bas. Est-ce que cette symétrie haut-bas est évidente ? On y reviendra bientôt.

- On doit aussi écrire que la corde est inextensible. Sa longueur reste constamment égale à h_0 . Mais comment exprimer la longueur de la corde ? Il y a une difficulté : on ne sait pas comment la longueur de la corde se répartit entre la partie libre et la partie entortillée. La longueur de la corde libre est $2a/\cos \varphi$, mais quelle est la longueur de la corde entortillée ? Il faudrait connaître l'angle que fait la corde entortillée avec la verticale. Pouvez-vous le trouver ?

Regardez-bien la balançoire : vous verrez que la partie libre et la partie entortillée font le même angle φ avec la verticale. Pouvez-vous expliquer pourquoi ? La réponse est : c'est une condition d'équilibre mécanique. Chaque morceau de la corde entortillée subit une force horizontale venant de l'autre corde ; et une tension de la part de son voisin du haut et de son voisin du bas. Pour que la somme de toutes ces forces soit nulle (condition d'équilibre si l'on ne tient pas compte des frottements solides, dans un premier temps), la tension vers le haut et vers le bas doivent avoir non seulement le même module, mais aussi la même composante verticale. Cela implique que l'orientation de la corde, c'est-à-dire le vecteur unitaire tangent à la corde, tourne en gardant toujours le même angle avec la verticale : on dit qu'il « précède » autour de la verticale. L'angle φ est donc constant du bas en haut de la corde, y compris sur la partie libre. On explique ainsi pourquoi on retrouve la même hauteur a au-dessus et en-dessous de l'entortillement.

Puisque la longueur de la corde garde la valeur h_0 , et que la corde fait un angle φ avec la verticale, sa hauteur est :

$$h(\theta) = h_0 \cos \varphi. \quad (205)$$

- Enfin, plus on enroule, plus b augmente : il doit donc y avoir une relation entre b et n . Trouvez-la en manipulant ! Observez que les deux cordes sont toujours jointives, pas d'espace libre entre elles. Déduisez-en qu'à chaque tour, on rajoute deux tours enroulés, chacun d'épaisseur e , donc le pas est $2e/\sin \varphi$:

$$b = \frac{2ne}{\sin \varphi}. \quad (206)$$

Alors, la partie géométrique est terminée. Il faut maintenant regrouper les équations (202-206). Ne paniquez pas, demandez-vous ce que vous voulez garder et ce que vous voulez éliminer. L'enroulement peut être indifféremment caractérisé par θ ou n (équation (202)), mais comme c'est n qui intervient dans les autres équations,

gardons-le pour l'instant. Ce qu'on veut, c'est donc trouver $h(n)$. Il faut donc éliminer a , b , et φ qui n'ont aucun intérêt.

Question : allez-vous linéariser les équations (202-206) ? La réponse est : oui, à tout prix, il faut linéariser les fonctions de φ pour éviter des calculs trigonométriques inutilement compliqués. C'est une approximation physique (voir page 4). Évidemment, cela n'est sûrement pas justifié quand on a des grands angles, par exemple pour un trapèze de portique d'enfant, où $l \approx 60$ cm et $h_0 \approx 1,20$ m. Sur une balançoire où $l \approx 45$ cm et $h_0 \approx 3$ m, est-ce qu'on peut voir si les angles sont petits devant 1 ? À l'œil, cela paraît raisonnable ; pour un critère plus précis, attendons d'avoir calculé φ .

En linéarisant, on trouve le système suivant, à l'ordre 2 en φ :

$$h = h_0 \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right), \quad (207)$$

$$h = 2a + b, \quad (208)$$

$$b = \frac{2ne}{\varphi}, \quad (209)$$

$$a = \frac{l}{2\varphi}. \quad (210)$$

On en tire :

$$\varphi = \frac{2ne + l}{h_0}. \quad (211)$$

L'approximation $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$ est justifiée tant que $2ne + l \ll h_0$, soit pour :

$$n \ll \frac{h_0 - l}{2e} \approx 80,$$

si l'épaisseur de la corde est de l'ordre de 1,5 cm. La gamme de validité est donc plus large que pour le trapèze, pour lequel on trouve comme critère $n \ll 20$. On obtient alors une équation qui devrait être essentielle pour la suite :

$$\frac{h(n)}{h_0} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2ne + l}{h_0} \right)^2 = 1 - \frac{1}{2h_0^2} \left(\frac{e\theta}{\pi} + l \right)^2. \quad (212)$$

Vérification : cette équation est bien homogène. Signe : h est bien toujours plus petit que h_0 . Quant au comportement, attendons un peu avant de le vérifier : on verra qu'il y a un petit problème, voir équation (222).

Mise en équations : dynamique. Puisque la vitesse de rotation de la balançoire est variable, il est certainement plus simple de rester dans le référentiel terrestre. Le système le plus simple est l'ensemble enfant + balançoire. Pour simplifier, on considérera qu'il s'agit d'un seul bloc. Autrement dit, on suppose que l'énergie cinétique de rotation de l'enfant est bien plus grande que celle de la corde. C'est une approximation tout à fait correcte, étant données les masses en jeu.

Le moment d'inertie de l'enfant + balançoire par rapport à un axe vertical fixe est celui d'une masse m d'environ 25 kg, avec un rayon typique de 15 cm, soit $J = 25 \text{ kg} \times (0,15 \text{ m})^2/3 = 0,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Si l'enfant rejette sa tête en arrière et ses jambes en avant (figure 19), le moment J peut doubler ou tripler et atteindre $J = 0,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Cette valeur est aussi celle pour un adulte de 75 kg qui se tient droit. En revanche, si on laisse la balançoire libre sans personne dessus (figure 73), le moment d'inertie est celui d'une planche de bois de $2 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$, donc un volume de $1600 \text{ cm}^3 = 1,6 \text{ dm}^3$, donc une masse $m = 0,9 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3} \times 1,6 \text{ dm}^3 = 1,4 \text{ kg}$, soit $J = 1,4 \text{ kg} \times (0,4 \text{ m})^2/12 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, c'est-à-dire 10 fois moins.

L'énergie potentielle de pesanteur est $E_{\text{pot}} = -mgh$: attention au signe, quand h grandit la balançoire baisse et son énergie potentielle aussi. Elle vaut, si on en croit l'équation (212) :

$$E_{\text{pot}} = -mgh = -mgh_0 \left[1 - \frac{1}{2h_0^2} \left(\frac{e\theta}{\pi} + l \right)^2 \right]. \quad (213)$$

L'énergie cinétique de rotation est :

$$E_{\text{cr}} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2. \quad (214)$$

Devez-vous tenir compte de l'énergie cinétique de translation verticale E_{ct} ? Intuitivement, on dirait que non, car la rotation semble dominer la translation. Vérifiez-le. De l'équation (212), on tire :

$$\dot{h} = -2h_0 \frac{1}{2h_0^2} \frac{e\dot{\theta}}{\pi} \left(\frac{e\theta}{\pi} + l \right),$$

soit, en utilisant l'équation (211) :

$$\dot{h} = -\varphi \frac{e\dot{\theta}}{\pi}. \quad (215)$$

Donc le rapport des deux termes est :

$$\frac{E_{\text{ct}}}{E_{\text{cr}}} = \frac{m\dot{h}^2/2}{J\dot{\theta}^2/2} = \frac{me^2\varphi^2}{\pi^2 J} \approx \frac{12e^2}{\pi^2 l^2} \varphi^2. \quad (216)$$

C'est un terme certainement plus petit que 10^{-3} , qu'on négligera avec le plus grand plaisir. Finalement, il ne reste plus pour l'énergie que les termes des équations (213) et (214) :

$$E = E_{\text{cr}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mgh. \quad (217)$$

La conservation de l'énergie mécanique E s'écrit donc :

$$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mgh_0 \left[1 - \frac{1}{2h_0^2} \left(\frac{e\theta}{\pi} + l \right)^2 \right] = \text{constante}. \quad (218)$$

Cette équation est peu lisible, on voit mal quelle sera la période. Contrairement à nos bonnes habitudes (voir page 7), nous allons exceptionnellement la dériver, en revenant à l'équation (217) :

$$\frac{dE}{dt} = J \dot{\theta} \ddot{\theta} - mg \dot{h} = 0,$$

puisque grâce à l'équation (215) on peut relier \dot{h} à $\dot{\theta}$ (plus facilement que relier h à θ), et donc l'éliminer :

$$J \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{mge\varphi\dot{\theta}}{\pi} = 0,$$

soit :

$$\ddot{\theta} = -\frac{mge\varphi}{\pi J} = -\frac{mgel}{\pi h_0 J} \left(1 + \frac{e\theta}{\pi l} \right). \quad (219)$$

Cette équation est-elle correcte ? Méfiance, voir les équations (223) et (224).

Vérifications. Procédez bien à toutes les vérifications :

- Première vérification : est-ce homogène ? Le membre de droite est en $(\text{kg} \times \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m} \times \text{m}) / (\text{m} \times \text{kg} \cdot \text{m}^2)$, donc en s^{-2} , comme le membre de gauche. Tout va bien. Pour rendre visible l'homogénéité, on peut introduire la pulsation Ω qui caractérise le problème :

$$\Omega = \sqrt{\frac{mgel}{\pi h_0 J}}. \quad (220)$$

Calculez tout de suite son ordre de grandeur ? C'est :

$$\Omega^2 = \frac{25 \text{ kg} \times 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \times 0,4 \text{ m}}{3 \times 3 \text{ m} \times 0,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \approx 1 \text{ s}^{-2},$$

soit $\Omega = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Rien d'absurde.

- Deuxième vérification : le signe. Quand θ est positif, le membre de droite l'est aussi, alors $\ddot{\theta}$ est négatif : il s'agit bien d'un rappel, c'est correct. Mais quand θ est négatif, on devrait avoir $\ddot{\theta}$ positif : ce n'est pas le cas ! Plus précisément, notre équation devrait vérifier rigoureusement la symétrie $\theta \rightarrow -\theta$, et ce n'est pas le cas. Pourquoi ? Où avons-nous dérapé ?

Reprenez toutes les équations une par une, soigneusement. Pour chacune, regardez si l'un ou l'autre membre change de signe quand on change θ en $-\theta$. Finalement, vous trouvez l'origine de l'erreur : c'est le passage de l'équation (202) à l'équation (206). En effet, la hauteur doit être la même si on enroule la balançoire dans un sens ou dans l'autre : b et φ restent toujours positifs même quand θ change de signe. D'où l'écriture correcte de l'équation (206), en éliminant n désormais inutile :

$$b = \frac{|\theta|e}{\pi \sin \varphi}. \quad (221)$$

On retrouve cette valeur absolue dans l'équation (212) qui devient (figure 74) :

$$\frac{h(\theta)}{h_0} = 1 - \frac{1}{2h_0^2} \left(\frac{e|\theta|}{\pi} + l \right)^2. \quad (222)$$

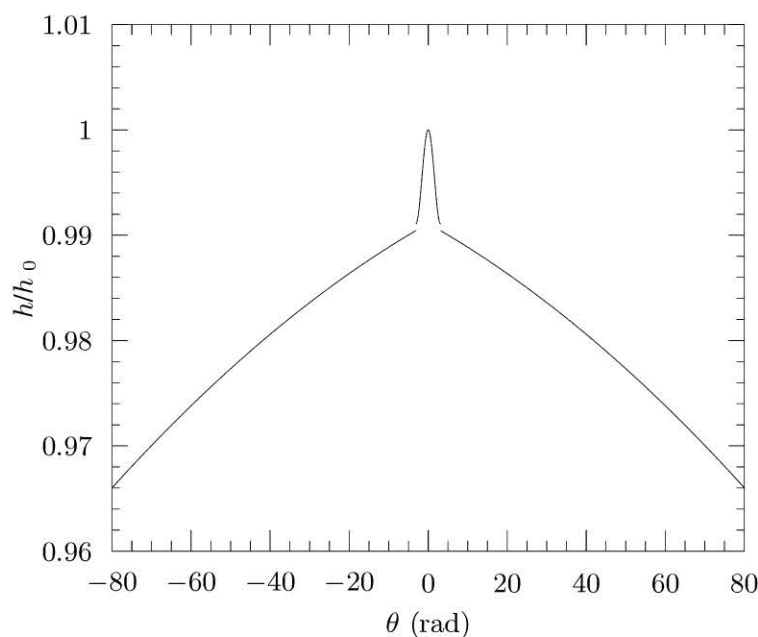


Figure 74 Hauteur h de la balançoire, en fonction de l'angle de rotation θ .

On a tracé l'équation (222) jusqu'à une douzaine de tours dans chaque sens, pour les valeurs $h_0 = 3 \text{ m}$, $l = 0,4 \text{ m}$, $e = 0,015 \text{ m}$.

Pour la discussion du petit pic autour de $\theta = 0$, voir « Ouvertures ».

On réécrit alors l'énergie potentielle :

$$E_{\text{pot}} = -mgh_0 \left[1 - \frac{1}{2h_0^2} \left(\frac{e|\theta|}{\pi} + l \right)^2 \right].$$

Ouf, cette fois elle est bien toujours supérieure ou égale à sa valeur en $\theta = 0$, qui est donc un équilibre stable. Pour la dériver, rappelez-vous que, à part en $\theta = 0$, on peut utiliser la fonction « signe » ($\text{sgn}(\theta) = |\theta|/\theta$) pour écrire :

$$\frac{d|\theta|}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}[\theta \text{sgn}(\theta)] = \text{sgn}(\theta),$$

et donc pour dériver par rapport au temps :

$$\frac{d|\theta|}{dt} = \frac{d}{dt}[\theta \text{sgn}(\theta)] = \text{sgn}(\theta)\dot{\theta}.$$

Finalement, l'équation correcte est :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \Omega^2|\theta| + \frac{\Omega^2 e}{\pi l} \frac{\theta^2}{2} = \text{constante}, \quad (223)$$

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \left(\text{sgn}(\theta) + \frac{e\theta}{\pi l} \right) = 0. \quad (224)$$

Bon, les signes sont cohérents : θ et $-\theta$ jouent le même rôle. Avant même de continuer, l'équation (223) permet de tracer le portrait de phases $\dot{\theta}(\theta)$ (figure 75). Remarquez la singularité en $\theta = 0$, qu'on discutera page 191.

- Troisième vérification : les comportements limites. On voit tout d'abord que e est au numérateur, ce qui confirme que la force motrice est liée à l'épaisseur de la corde. C'est donc un paramètre essentiel ! Cela fait penser à l'exercice 1. Ensuite, on voit que c'est le rapport m/J qui intervient : c'est un rapport purement géométrique, de l'ordre de $1/l^2$. La masse de l'enfant n'intervient donc pas ; du moins, tant qu'elle suffit à maintenir la corde bien tendue, et qu'elle est plus grande que celle de la corde, voir page 186. C'est normal pour un problème d'oscillateur dont la force motrice est la pesanteur. Enfin, par rapport au pendule pesant, caractérisé par la seule longueur $(J/m)^{-1/2}$, ici on a une combinaison compliquée des longueurs $(J/m)^{-1/2}$, h_0 , l et e .

Discussion. Il faut discuter de l'importance du terme :

$$\frac{e|\theta|}{\pi l} = \frac{b \sin \varphi}{2a \sin \varphi} = \frac{b}{2a}.$$

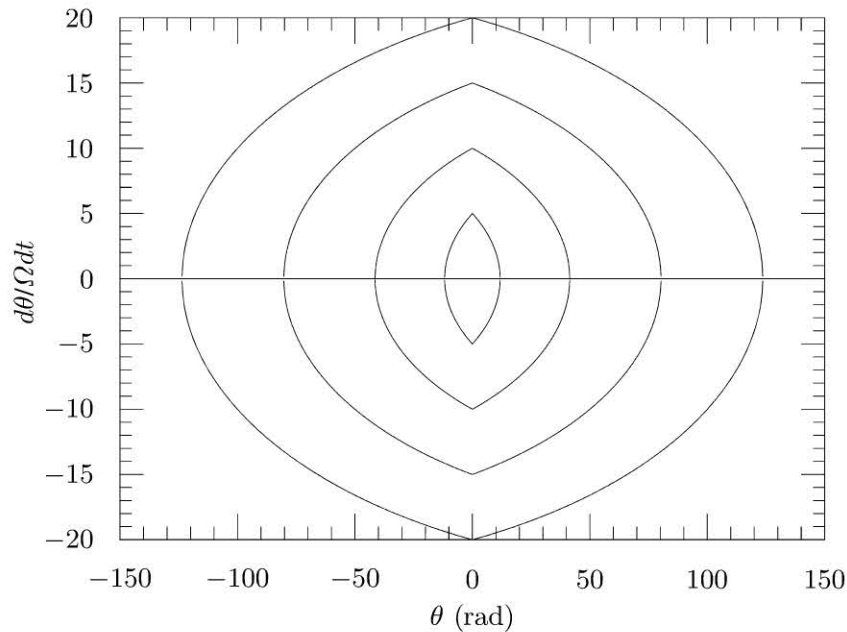


Figure 75 Allure des trajectoires dans le plan $(\theta, \dot{\theta})$.

On a tracé par ordinateur la courbe déduite de l'équation (223) :

$\dot{\theta}^2 / \Omega^2 = 2k - 2|\theta| - (e/\pi l)\theta^2$, en prenant $e/\pi l = 1,5 \text{ cm} / 3 \times 40 \text{ cm} \approx 10^{-2}$.

Pour la constante k , on a pris chacune des quatre valeurs $k = 12, 5$, $k = 50$,

$k = 112, 5$ et $k = 200$.

C'est ce qu'on pourrait appeler le « taux d'entortillement » : la fraction de corde entortillée sur la fraction libre. On peut concevoir que cette quantité joue un rôle important pour guider la discussion :

- Régime très entortillé : on voit tout de suite un premier régime, où $e|\theta| > \pi l$. Le terme dominant est celui d'un oscillateur harmonique, de pulsation propre :

$$\omega_0 = \Omega \sqrt{\frac{e}{\pi l}}.$$

La corde entortillée se comporte alors comme un pendule de torsion. Attention, on n'a pas eu besoin d'invoquer l'élasticité des deux cordes, voir page 182 : le moteur, ici, c'est l'accélération g de la pesanteur.

Comme $e/\pi l \approx 10^{-2}$, on trouve une pulsation propre $\omega_0 = 0,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, soit une période de plusieurs dizaines de secondes, indépendante de l'amplitude. Naturellement, si l'amplitude est trop élevée, c'est-à-dire si l'on a vraiment beaucoup enroulé au départ, $e|\theta|$ cesse d'être petit devant h_0 , donc on doit prendre en compte les équations (202-206) complètes, y compris quelques termes non-linéaires. Mais ils ne changeront pas grand-chose. En revanche, même si l'on part au début avec $e|\theta| > \pi l$, la balançoire va se dérouler et on va toujours, toujours entrer dans le régime peu entortillé suivant.

- Régime peu entortillé : $e|\theta| < \pi l$. Les équations (223) et (224) sont dominées par un terme curieux :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \Omega^2|\theta| = \text{constante},$$

$$\ddot{\theta} + \text{sgn}(\theta)\Omega^2 = 0. \quad (225)$$

Qu'est-ce qu'on en fait ? Comment pouvez-vous traiter cette singularité ?

Tant que $\theta > 0$, on a une décélération constante $\ddot{\theta} = -\Omega^2$, égale à 1 s^{-2} , soit un mouvement parabolique $\theta(t) = \text{constante} - \Omega^2 t^2/2$. La durée de cette parabole varie avec l'amplitude, comme $\sqrt{2\theta_{\max}}/\Omega$: on peut avoir n'importe quelle période, il n'y a pas de période propre. En ordre de grandeur, on trouve donc une dizaine de secondes pour une balançoire moyennement enroulée : non seulement c'est raisonnable, mais en plus ça se raccorde avec la solution harmonique discutée ci-dessus.

En $\theta = 0$, on a comme toujours la continuité de $\dot{\theta}$ (puisque l'accélération reste finie) ; en revanche, l'accélération $\ddot{\theta}$ change brutalement de valeur, et même de signe. D'où la rupture de pente visible sur la figure 75, où les courbes tendent vers des ellipses pour $\theta \gg 1$ et vers des paraboles pour θ proche de 1. Ce problème est très riche, voir « **Notes** » et « **Ouvertures** ».

Notes. Autour d'un point d'équilibre, l'énergie potentielle est une fonction paire en θ . On a donc l'habitude d'écrire un développement limité du type $E_{\text{pot}} = c_0 + c_2\theta^2 + c_4\theta^4 + \dots$, où la constante c_0 ne joue aucun rôle, c_2 décrit le terme harmonique dominant conduisant à un oscillateur linéaire, et c_4 une petite correction non-linéaire.

Or, si E_{pot} contient aussi un terme :

$$c_1|\theta|,$$

on a l'exemple le plus simple et le plus frappant d'oscillateur non-linéaire. Cette singularité apparaît aussi dans un contexte très différent : la stabilité d'objets posés sur la tranche, comme la valise à roulettes, les dominos, la tartine beurrée (voir [1]) ; ou bien en électrostatique, au voisinage de lignes chargées (voir [2]). C'est une non-linéarité forte ; elle domine le terme harmonique. Puisque l'accélération reste finie, il n'y a pas de choc. En revanche, l'accélération est discontinue en $\theta = 0$. Par ailleurs, la dissipation est importante en $\theta = 0$, donc le facteur de qualité est mauvais (voir page 181).

Ouvertures.

- Au lieu d'utiliser l'énergie, serait-ce possible de calculer le moment des forces ? Pour cela, étudiez l'effet de l'épaisseur e des cordes : montrez que les cordes ne sont pas rigoureusement sur un plan de symétrie. Cette méthode peut marcher, mais elle est nettement plus laborieuse.

- Lorsqu'on a fait moins qu'un demi-tour, $-\pi < \theta < \pi$, la corde n'est pas entortillée. Pouvez-vous étudier ce cas, très différent du cas entortillé traité ci-dessus ? On trouve par simple géométrie que : $h_0^2 = h^2(\theta) + (1 - \cos \theta)l^2/2$, donc :

$$\frac{h(\theta)}{h_0} = \sqrt{1 - \frac{l^2}{2h_0^2}(1 - \cos \theta)}. \quad (226)$$

Cette équation est celle du petit pic qui apparaît près de $\theta = 0$ sur la figure 74 ; l'équation (222) s'y raccorde à peu près. Elle s'y raccorderait exactement si on l'avait écrite proprement : en remplaçant $|n|$ par $|n - 1/2|$ (ou $|\theta|$ par $|\theta - \pi|$) dans les équations (221) et (222). Cette correction ne modifie pas la discussion des pages précédentes.

Dans des expériences récentes de micro-manipulation d'une molécule d'ADN, on est capable de dérouler les deux brins de la double hélice : au moment où l'on passe par l'état déroulé $\theta = 0$, on observe exactement ce même petit pic d'allongement [3].

Cette équation (226) peut se développer pour $|\theta| \ll 1$:

$$h(\theta) \approx h_0 \sqrt{1 - \frac{l^2 \theta^2}{4h_0^2}} \approx h_0 - \frac{l^2 \theta^2}{8h_0}.$$

Cela oscille avec une pulsation propre $\omega^2 = mgl^2/4h_0J$. Donc l'ordre de grandeur de ω est donné par $\sqrt{g/h_0}$, soit de l'ordre du $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Contrairement aux équations (222) et (225), près de l'équilibre on trouve un oscillateur harmonique, qui n'est pas singulier en $\theta = 0$, voir « Notes ». C'est cela qui est déconcertant : si vous êtes sur la balançoire, votre ventre perçoit bien une discontinuité, comme quand un avion passe dans un trou d'air ; mais si vous essayez de l'observer de près en faisant délicatement tourner la balançoire à la main, la singularité a disparu...

Sources et références

- [1] F. GRANER. *Petits problèmes de physique – première partie*. Springer, Heidelberg, 1998. Exercices 12, 16, 23 et G.
- [2] L. VALENTIN. *L'Univers mécanique*. Hermann, Paris, 1999.
- [3] G. CHARVIN, V. CROQUETTE, et D. BENSIMON. Single molecule study of DNA unlinking by eukaryotic and prokaryotic type II Topoisomerases G. *Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)*, volume 100, 2003, pages 9820-9825.

Corrigé 19 Leçon des cœurs (Énoncé à la page 32)

► Question 19.1.

Première approche (description). En manipulant, on constate que le cœur apparaît dans les conditions suivantes :

- En ce qui concerne la source, l'important est sa direction (et non sa distance) : la lumière doit arriver inclinée, ni trop, ni trop peu ; donc pas horizontalement ni verticalement. On observe mieux ce cœur avec une source ponctuelle, comme le Soleil ou une ampoule (avec une source allongée, comme un tube néon, sa forme est différente), mais sa couleur ne joue pas. Il ne faut pas être ébloui par de la lumière parasite à côté : ainsi, on ne peut observer ce cœur avec une lampe électrique si la pièce est ensoleillée.
- Le verre doit avoir un axe de symétrie de révolution. Il doit donc être circulaire, mais son diamètre n'est pas nécessairement constant : un bol, qui n'est pas cylindrique, convient. Sa hauteur n'intervient pas, son diamètre non plus : que le verre soit petit ou grand, le cœur a toujours la même taille que le diamètre du verre. Le verre doit être réfléchissant, mais son matériau (sa couleur et sa transparence) n'intervient pas. Si l'on incline un peu le verre, le cœur se déforme ; si on l'incline beaucoup, le cœur disparaît.
- Le liquide n'est visiblement pas essentiel. Il suffit qu'on puisse visualiser le cœur à sa surface, ce qui marche un peu mieux avec un liquide diffusant (lait) que transparent (eau). Sa hauteur ne joue pas ; à la limite, sans liquide du tout, on continue à observer le cœur, si le fond du verre est bien diffusant, et si la direction de la source lumineuse convient.
- La position de l'observateur n'intervient pas : le cœur est bien réel, il est situé à la surface du liquide, et garde la même forme même si l'on déplace la tête.

Analyse qualitative. Alors, comment pouvez-vous expliquer ce phénomène ? S'agit-il d'optique géométrique ou physique ? Que se passe-t-il exactement ?

En faisant de l'ombre avec la pointe d'un crayon, vous pouvez identifier exactement d'où vient la lumière qui éclaire chaque endroit de la surface : il s'agit donc d'optique géométrique (il y a cependant une correction, voir « **Notes** »).

On constate ainsi que le cœur se construit à partir des rayons qui viennent de la source, passent par-dessus le rebord du verre, viennent frapper le côté opposé du verre. C'est en revenant qu'ils forment le cœur, qu'on visualise grâce à un support matériel diffusant (comme un écran de projection), en l'occurrence la surface du liquide.

Chaque partie du cœur est construite par quelques rayons ; la pointe est la plus lumineuse, car elle est construite à partir de tous les rayons qui se réfléchissent près du plan de symétrie (voir page 197). Les rayons réfléchis par le verre (voir la figure 76) contribuent aussi à éclairer l'extérieur du cœur, qui est donc un peu plus

lumineux. En revanche, l'intérieur du cœur n'est éclairé que par les rayons qui viennent directement, sans réflexion.

Si la lumière arrive verticalement, elle entre dans le verre et, sans s'y réfléchir, vient directement frapper la surface du liquide. Si la lumière arrive horizontalement, elle n'arrive pas à passer par-dessus le bord du verre, et toute la surface du liquide est dans l'ombre. Dans ces deux cas le cœur ne se forme pas.

► Question 19.2.

Simplifications. À première vue, il s'agit d'un problème à trois dimensions. En effet, comme on vient de le dire, pour que le cœur puisse exister il faut que les rayons soient inclinés par rapport à l'horizontale. Mais leur angle n'a pas d'influence sur la forme ou la position du cœur. Pourquoi ?

La réponse est qu'en fait tous les rayons qui sont dans le même plan vertical sont réfléchis par le verre de la même façon. Ce qu'on voit à la surface du liquide, c'est l'intersection entre les plans verticaux et la surface du liquide (voir la figure 76). Le problème est invariant par translation de l'axe vertical, donc c'est en fait un problème de géométrie à deux dimensions.

On peut donc, et même on doit se placer en vue de dessus, en projetant le tout sur un plan horizontal. Le verre apparaît alors comme un cercle, les plans verticaux de rayons incidents comme des droites parallèles, qui se réfléchissent sur le cercle, l'angle réfléchi étant égal à l'angle incident (voir la figure 77).

Analyse quantitative. Comment devrez-vous procéder ? Dans un premier temps, vous devrez écrire l'équation des droites parallèles incidentes, et donc des droites réfléchies.

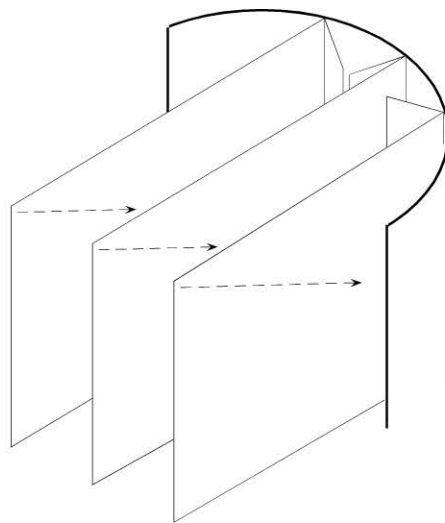


Figure 76 Vue en perspective des rayons venant se réfléchir sur le verre.

Les rayons sont symbolisés par des flèches pointillées et le verre est en trait gras. Tous les rayons appartenant à un même plan vertical se réfléchissent de la même manière.

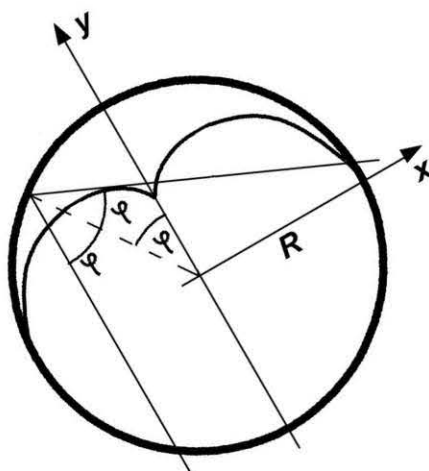


Figure 77 Notations pour l'équation du cœur : coordonnées cartésiennes (x, y) et angle φ .

Mais ensuite, comment pourrez-vous en déduire la forme du cœur ? Considérez deux rayons très proches. Là où ces deux rayons se croisent, ils coïncident presque, donc il y a beaucoup plus de lumière par unité de surface. Le cœur est donc la courbe dont chaque point appartient à la fois à l'un des rayons réfléchis, et à son voisin immédiat. On dit que le cœur est « l'enveloppe » des rayons réfléchis (de façon équivalente, on démontrera qu'en tout point, le cœur est tangent à l'un des rayons réfléchis, voir équation (229)).

Notations. Commencez par calculer l'équation des rayons lumineux. Pour cela, introduisez des notations, par exemple celles de la figure 77 : notons (x, y) les axes centrés sur le cercle, tels que y soit parallèle à la direction d'incidence ; R le rayon du cercle ; φ l'angle entre un rayon incident et la normale au cercle au point d'incidence (le rayon réfléchi repart en faisant lui aussi un angle φ avec la même normale), avec $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$.

Mise en équations. Le rayon incident a pour équation $x = \text{constante} = -R \sin \varphi$. Mais ce qui est utile c'est uniquement l'équation du rayon réfléchi. Comme il fait un angle 2φ avec y , et puisqu'il passe par le point $(-R \sin \varphi, R \cos \varphi)$, son équation s'écrit :

$$[x + R \sin \varphi] \cos 2\varphi + [y - R \cos \varphi] \sin 2\varphi = 0. \quad (227)$$

Vérifications :

- L'équation (227) est visiblement homogène.
- Signe : si $\varphi > 0$, comme sur la figure 77, la pente $dy/dx = -1/\tan(2\varphi)$ de la droite est bien négative.
- Comportement :
 - Si $\varphi = 0$ on trouve bien $x = 0$, qui est le rayon du milieu.

- Si $\varphi = \pi/4$ on trouve bien $y = \text{constante} = R \cos(\pi/4)$, ce qui est un rayon réfléchi parallèlement à x .
- Si $\varphi = \pi/2$ on trouve bien $x = \text{constante} = -R$, c'est-à-dire que le rayon tangent au verre n'est pas dévié.

Tout point (x, y) du cœur doit appartenir à un rayon réfléchi, donc doit avoir un angle φ tel que la relation (227) soit vérifiée. Il doit aussi appartenir au rayon immédiatement voisin, repéré par $\varphi + d\varphi$, donc on doit avoir également la relation :

$$[x + R \sin(\varphi + d\varphi)] \cos(2(\varphi + d\varphi)) + [y - R \cos(\varphi + d\varphi)] \sin(2(\varphi + d\varphi)) = 0. \quad (228)$$

Pour que les relations (227) et (228) soient vérifiées simultanément, il faut et il suffit qu'on vérifie à la fois l'équation (227) et sa différentielle par rapport à φ :

$$\begin{aligned} [x + R \sin \varphi] \cos 2\varphi + [y - R \cos \varphi] \sin 2\varphi &= 0, \\ R \cos \varphi \cos 2\varphi - 2[x + R \sin \varphi] \sin 2\varphi \\ &+ R \sin \varphi \sin 2\varphi + 2[y - R \cos \varphi] \cos 2\varphi = 0. \end{aligned} \quad (229)$$

Pour chaque φ , on a ainsi un système de deux équations à deux inconnues (x, y) . On va ainsi trouver x et y en fonction de φ , c'est-à-dire une équation paramétrique du cœur.

Résolution. Pour résoudre le système (229), il est plus simple de changer de variables en posant :

$$\begin{aligned} u &= x + R \sin \varphi, \\ v &= y - R \cos \varphi. \end{aligned} \quad (230)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} u \cos 2\varphi + v \sin 2\varphi &= 0, \\ 2u \sin 2\varphi - 2v \cos 2\varphi &= R \cos \varphi \cos 2\varphi + \sin \varphi \sin 2\varphi \\ &= R \cos \varphi. \end{aligned} \quad (231)$$

On en tire u et v en fonction de φ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} R \cos \varphi \sin 2\varphi, \\ v &= -\frac{1}{2} R \cos \varphi \cos 2\varphi, \end{aligned} \quad (232)$$

et finalement (avec l'équation (230)) l'équation paramétrique souhaitée, c'est-à-dire x et y en fonction de φ (voir « Notes ») :

$$\begin{aligned}x &= -R \sin \varphi + \frac{1}{2} R \cos \varphi \sin 2\varphi, \\y &= R \cos \varphi - \frac{1}{2} R \cos \varphi \cos 2\varphi.\end{aligned}\quad (233)$$

Vérifications. Cette équation (233) est difficile à vérifier ; réalisons quand même quelques tests simples :

- Elle est visiblement homogène. Toutes les longueurs sont proportionnelles à R ; c'est d'ailleurs correct dimensionnellement, puisqu'il n'y a pas d'autre longueur dans le problème. Quelle que soit la taille du verre, le cœur s'inscrit toujours dans le cercle.
- Signe : on a bien la symétrie $\varphi \rightarrow -\varphi$, $x \rightarrow -x$, tandis que y reste strictement positif dans la gamme $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.
- Comportement :
 - L'allure de cette courbe donnée par l'équation (233) est bien celle représentée sur la figure 77, voir « Notes ».
 - En $\varphi = \pi/2$, on trouve bien $x = -R$, $y = 0$.
 - En $\varphi = 0$, on trouve $x = 0$, $y = R/2$. Il s'agit d'un point de rebroussement, autrement dit une pointe ; plusieurs valeurs de φ s'accumulent en son voisinage. Cela explique que la pointe soit plus lumineuse que le reste du cœur.

Commentaires. Si vous inclinez le verre d'un angle θ , qu'est-ce que cela change ? L'inclinaison du verre par rapport à la direction des rayons incidents ne joue pas. Le cœur garde sa forme dans un plan perpendiculaire à l'axe du verre. Seul ennui : la surface de l'eau, elle, reste obstinément horizontale, donc elle n'est plus perpendiculaire à l'axe du verre. Le cœur qu'on voit, à la surface de l'eau, est donc le même que ci-dessus, mais projeté avec un angle θ .

Notes.

- Intéressant : la majorité des rayons réfléchis, ceux qui correspondent aux plus grandes valeurs de φ , ne sont pas des minima du trajet optique ! En effet, plusieurs rayons réfléchis (les uns à grand φ , les autres à petit φ) se croisent au même point alors que leur longueur est différente [1]. En revanche, ce sont toujours des extrema, et le principe de Fermat s'applique bien.
- La courbe donnée par l'équation (233) est une épicycloïde. On peut la construire en faisant rouler autour d'un petit cercle (rayon $R/2$) un rond encore plus petit (rayon $R/4$). Elle s'appelle la « néphroïde », c'est-à-dire en forme de rein. Ce nom est certes moins poétique que « cœur », mais c'est assez réaliste, quand on

la trace complètement (c'est-à-dire si on traçait aussi la région que les rayons n'atteignent pas : $y < 0$, $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$).

- L'optique géométrique prédit correctement la position et la forme du cœur. En revanche, elle prédirait ici que le cœur serait une ligne infiniment fine d'intensité lumineuse infinie. C'est une absurdité, et si l'on s'intéresse à l'intensité de la lumière en tout point, il faut réaliser une étude physique, comparable à celle de la page 93. Il reste que le cœur est effectivement bien visible et très intense : une telle accumulation de lumière s'appelle une « caustique », ce qui veut dire qu'elle peut brûler.
- Dans la vie quotidienne, on observe bien d'autres caustiques, de formes différentes : dans le pied d'un verre à pied ; à travers une bouteille qui n'est pas lisse (par exemple les petites bouteilles de soda) ; à travers le fond d'une bouteille ; à travers un bol transparent où flotte une bougie ; dans les gouttes de pluie sur un pare-brise éclairées par un lampadaire ; à travers une vitre dépolie de salle de bain ; ou au fond d'une piscine dont la surface est parcourue de vagues. Dans un autre ordre d'idée, en astrophysique, les lentilles gravitationnelles (grosses masses qui défléchissent la lumière) provoquent elles aussi des caustiques, permettant d'observer des signaux astrophysiques intenses.

Sources et références

La théorie des catastrophes, en mathématique, décrit bien l'apparition de telles singularités, et l'ordre dans lequel elles se succèdent. On trouvera de jolies expériences dans les références [2, 3].

- [1] T. POSTON et I. STEWART. *Optics and Scattering Theory*. Pitman, London, 1978.
- [2] J. WALKER. Les caustiques. *Pour la Science*, volume 73, novembre 1983, pages 160-167.
- [3] J. WALKER. L'optique catastrophique. *Pour la Science*, volume 145, novembre 1989, pages 148-152.

Corrigé 20 Une loupe ardente (Énoncé à la page 34)

Attention : en raison de nombreuses fausses pistes possibles, lisez ce corrigé progressivement (et non pas d'une seule traite), en essayant de répondre une par une à chacune des sous-questions.

Première approche. Pourquoi la température du papier s'élève-t-elle ? C'est naturellement le Soleil qui fournit un flux (puissance par unité de surface), sous forme de rayonnement. La loupe reçoit cette puissance sur toute sa surface ; on la dispose bien sûr perpendiculairement à la direction du Soleil, comme sur la figure 78. Son rôle est de concentrer cette puissance sur une surface bien plus petite, ce qui augmente le flux lumineux reçu par le papier (la puissance étant conservée, le flux est

inversement proportionnel à la surface). La partie du papier qui est illuminée absorbe une partie de ce flux, donc sa température s'élève.

Notations. Quels sont les paramètres pertinents ? On les découvrira certainement au fur et à mesure de la mise en équations. On peut d'ores et déjà prévoir que les paramètres suivants (voir la figure 78) vont intervenir :

- le rayon R et la surface $S = \pi R^2$ de la loupe, ainsi que sa distance focale f ;
- le flux lumineux Φ venant du Soleil qui atteint la loupe, et donc la puissance $\mathcal{P} = \Phi S$ concentrée par la loupe ;
- la surface s de la tache éclairée ;
- le flux lumineux $\mathcal{P}/s = \Phi S/s$ arrivant sur le papier ;
- la capacité calorifique c du papier, par exemple par unité de masse ; son épaisseur e ; et sa température d'inflammation T_i , à laquelle il faut le porter pour qu'il s'enflamme.

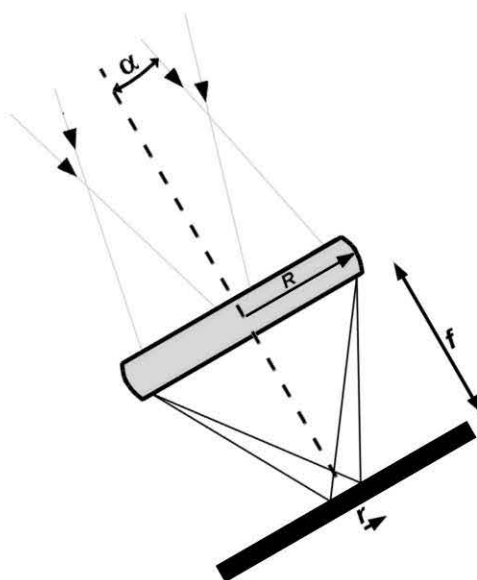


Figure 78 Notations.

Première optimisation, et valeurs. Parmi les paramètres ci-dessus, lesquels sont fixés ? Lesquels pouvez-vous choisir, et alors quelle valeur allez-vous leur donner ?

- Pour avoir le flux lumineux Φ le plus grand possible au niveau de la loupe, il faut se mettre en plein soleil, vers midi, un jour sans nuage, à une latitude la plus proche possible de l'Équateur (voir page 139). On se rapproche alors le plus possible du flux Φ_r reçu du Soleil qui arrive sur la haute atmosphère terrestre, $\Phi_r = 1,35 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ (voir page 288). Ensuite, il suffit de mettre la loupe bien perpendiculaire aux rayons du Soleil (voir la figure 78).
- Il faut prendre la loupe la plus grande dont on dispose. La mienne a un diamètre $2R = 75 \text{ mm}$. On ne voit pas encore où intervient la distance focale.

- La capacité calorifique c du papier et sa température d'inflammation T_i sont des propriétés intrinsèques du papier, sur lesquelles vous ne pouvez pas jouer. Si vous ne les connaissez pas, vous pouvez au moins estimer que c est probablement un peu inférieure à celle de l'eau (rappelez-vous que l'eau est l'un des matériaux courants qui a la plus grosse capacité calorifique), donc on prendra comme ordre de grandeur $4 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, voir page 286. Quant à T_i , c'est certainement supérieur à 100°C , mais facilement accessible avec une allumette : cela doit être de l'ordre de quelques centaines de degrés Celsius, donc on prendra comme ordre de grandeur 500 K (en pratique, il se trouve que c'est justement ça [1]).
- Enfin, le point crucial est la surface de la tache. Il faut la diminuer autant qu'on peut. Il faut donc mettre la feuille non pas à plat sur la table, comme sur la figure 21, mais tenue à la main bien perpendiculaire aux rayons du Soleil, comme sur la figure 78. En ce cas la tache est un cercle, dont on notera r le rayon ($s = \pi r^2$). Ensuite, on met bien la feuille au foyer de la loupe. On peut ainsi mesurer la distance focale de la loupe : c'est la distance où la tache est la plus petite. Sur ma loupe, je mesure ainsi $f = 175 \text{ mm}$. Et alors, quelle est la taille de la tache ?

Première fausse piste. Une erreur courante est de dire que la tache peut être rendue aussi petite qu'on veut. C'est absurde théoriquement, car on aurait alors un flux aussi élevé qu'on veut, et donc le papier s'enflammerait immédiatement (voir page 203). Surtout, c'est contraire à l'expérience : même si vous êtes très habile, et si votre main ne tremble pas, vous avez au mieux un petit rond de quelques millimètres de diamètre ; ainsi, j'obtiens $2r \approx 2 \text{ mm}$ de diamètre ; et en outre la tache est très nette, ce qui m'indique que je ne peux pas faire mieux. Pourquoi cela ?

Deuxième fausse piste. Le réflexe peut être de quitter l'optique géométrique et de supposer que la diffraction joue un rôle. Faites tous les calculs que vous voulez : une lumière visible, de longueur d'onde inférieure au micron, passant à travers une loupe de quelques centimètres de diamètre, n'aura jamais une tache de diffraction significative, en tous cas pouvant atteindre 2 mm . En outre, puisque l'image du Soleil est particulièrement nette quand la feuille est au foyer de la loupe, on a du mal à croire au rôle de la diffraction. Alors, que se passe-t-il ?

Analyse qualitative. L'erreur est d'avoir assimilé le Soleil à une source ponctuelle. Cette approximation, qui est certes très usuelle, devient un bel exemple d'approximation abusive (voir page 5) dans le problème particulier qui nous intéresse ici.

En effet, le Soleil a une taille finie : il est même très gros ! Il nous apparaît avec un certain rayon angulaire α_S . Vous pouvez le mesurer facilement. Pour cela, mesurez la largeur de votre petit doigt ; puis la distance entre votre œil et votre doigt quand, bras tendu, il cache exactement le Soleil. Le rayon angulaire apparent du Soleil vaut $\alpha_S = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$, soit un diamètre apparent d'environ $32'$ (voir page 288).

Certes, α_S est bien plus petit que 1 ; mais ici, ça n'a pas de sens de le négliger devant 1. En effet, ce rayon angulaire apparent joue un rôle essentiel (voir page 203). Les rayons incidents ne sont pas exactement parallèles. L'image du Soleil sur la feuille a une taille finie bien précise :

$$r = f \tan(\alpha_S). \quad (234)$$

Pour ma loupe, l'équation (234) donne $2r = 1,6$ mm, ce que je mesure à peu près correctement.

On connaît donc le flux incident sur la feuille. Pour déterminer la rapidité avec laquelle la température du papier s'élève, il faut faire le bilan de puissance, et donc connaître la fraction du flux incident que la feuille absorbe effectivement.

Troisième fausse piste. Le réflexe est d'écrire que la feuille absorbe toute la puissance incidente. En ce cas, le bilan de puissance ne pose pas de difficulté particulière, comme on le verra ci-dessous. On trouve alors que le papier s'enflamme rapidement. Or c'est manifestement faux. Expérimentalement, je n'ai jamais vu quelqu'un réussir à enflammer une feuille blanche. Qu'a-t-on oublié ?

Deuxième optimisation, et valeurs. Le paramètre essentiel est la couleur de la feuille ! Si la feuille est blanche, elle réfléchit quasiment toute la puissance incidente. Pour avoir une chance de l'enflammer, il faut faire dessus un petit point à l'encre noire ; ou prendre du papier déjà écrit, comme du journal ; ou encore mieux (voir « **Ouvertures** »), noircir entièrement la surface éclairée avec un stylo ou un feutre. En ce cas seulement, elle absorbe tout, et sa température s'élève rapidement. Un moyen facile de tester cet effet, c'est de se dessiner une petite tache noire sur la main, et de concentrer les rayons du Soleil dessus : c'est plus douloureux que sur la peau propre.

Il reste enfin à minimiser le rayon $r = f \tan(\alpha_S)$ de la tache. Comme α_S est fixé, il faut diminuer f . Il ne sert cependant à rien de prendre une toute petite loupe, car alors on diminue R . Ce qu'il faut maximiser, c'est en fait le rapport :

$$N = \frac{R}{f}. \quad (235)$$

C'est un nombre sans dimension qu'on appelle l'ouverture numérique (voir « **Notes** »). Pour ma loupe, il vaut : $N = 75 \text{ mm} / (2 \times 175 \text{ mm}) = 0,2$.

Simplifications. Dans le bilan de puissance, faut-il tenir compte de la puissance réémise par différents mécanismes : rayonnement réémis, convection par l'air, conduction vers les parties de la feuille qui ne sont pas éclairées ? Cette question n'est pas facile ; voir « **Ouvertures** » et exercice 12, où elles sont discutées physiquement.

Ici, on propose de les négliger, non pas qu'elles soient particulièrement petites, mais parce que cela simplifie le calcul sans perdre l'essence de la physique (voir page 4). En effet, le problème est visiblement dominé par le rayonnement incident du Soleil. Vu l'imprécision que nous avons sur les paramètres du problème (en particulier Φ ou c), on cherche à estimer seulement un ordre de grandeur du temps d'inflammation, disons à un facteur 2 ou 3 près.

On va donc caractériser la zone éclairée par une seule température uniforme, T , et l'on ne s'occupe pas des zones non éclairées.

Mise en équations. Avec cette simplification, le bilan de puissance s'écrit, en notant ρ la densité du papier et e son épaisseur :

$$\rho e s c \frac{dT}{dt} = \mathcal{P} = \Phi S. \quad (236)$$

Résolution. En supposant que tous les termes sont à peu près indépendants de la température, on en tire l'ordre de grandeur du temps typique τ_i nécessaire pour que la feuille s'enflamme :

$$\tau_i \approx \rho e s c \frac{T_i - T_{\text{amb}}}{\Phi S}.$$

Or on a, géométriquement :

$$\frac{s}{S} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{f \tan(\alpha_S)}{R} \right)^2 = \left(\frac{\tan(\alpha_S)}{N} \right)^2,$$

donc finalement :

$$\tau_i \approx \rho e c \frac{T_i - T_{\text{amb}}}{\Phi} \frac{\tan^2(\alpha_S)}{N^2}. \quad (237)$$

Vérifications.

- Homogénéité : N et α_S sont sans dimension, donc le membre de droite est en : $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \times \text{m} \times \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times \text{K}/(\text{W} \cdot \text{m}^{-2})$, soit des $\text{J} \cdot \text{W}^{-1}$, donc des secondes.
- Le signe ne doit pas poser de problème : la température augmente avec le temps, on n'a écrit que des termes positifs (équation (236)).
- Comportement :
 - Il est linéaire, ce qui n'est valable qu'aux temps courts (voir équation (124) pour la saturation aux temps longs), mais cela nous suffit ici.
 - τ_i augmente avec l'inertie thermique du papier, représentée ici par ρ , e et c : on a donc intérêt à prendre un papier le plus fin possible, par exemple du journal [2].

- τ_i est plus long si la température initiale du papier, T_{amb} , est bien au-dessous du seuil d'inflammation, T_i .
- Un grand flux incident Φ , et une grande ouverture numérique N , favorisent bien une inflammation rapide.
- On vérifie que α_S joue un rôle important, et que s'il était nul cela donnerait un temps τ_i nul.

Valeurs numériques. Pour calculer l'ordre de grandeur, il ne nous manque plus que la valeur de ρ et de e . On peut certes les estimer séparément, en disant que ρ doit être proche de celle de l'eau, et en mesurant l'épaisseur d'une ramette de cinq cents feuilles (on trouve 6 cm : soit pour une feuille $e = 0,12$ mm). Mais il est bien plus précis de regarder l'étiquette de la ramette, qui indique le grammage du papier, typiquement $80 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}$. Or ce grammage est exactement le produit ρe que nous cherchons ! (Au passage, cela nous permet d'en déduire la valeur de $\rho = 80 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2} / 0,12 \text{ mm} = 670 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, qui est en effet proche de celle de l'eau). On trouve donc comme ordre de grandeur de τ_i :

$$\begin{aligned} \tau_i &\approx 80 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \times 4 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ &\quad \times \frac{(500 - 300) \text{ K}}{10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}} \times \left(\frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,2} \right)^2 \\ &< 0,1 \text{ s.} \end{aligned} \quad (238)$$

S'il est bien noirci, le papier s'enflamme en une fraction de seconde. C'est ce que l'on constate expérimentalement, même s'il est difficile d'être précis.

Notes.

- L'ouverture numérique caractérise la luminosité d'un instrument d'optique : jumelles, lunette ou télescope astronomique, objectif de microscope, appareil photo. Ainsi, la plupart des petites jumelles grossissent bien, mais ont une faible ouverture numérique (on voit plus sombre dans des jumelles qu'à l'oeil nu), donc elles sont inutilisables pour faire brûler du papier. Réaliser une grande ouverture numérique est difficile, donc cela coûte cher.

Rigoureusement, l'ouverture numérique est définie comme $\sin \theta$, où θ est l'angle que font les rayons avec l'axe optique :

$$N = \sin \theta = \sin \left[\arctg \left(\frac{R}{f} \right) \right].$$

Pour un système complètement ouvert, $\theta = \pi/2$, l'ouverture vaut 1. Pour un système très fermé, $\sin \theta \approx \theta$, et l'on retrouve l'expression approchée donnée par l'équation (235).

Plus généralement, chaque domaine de l'optique (comme celui des lasers, ou des fibres optiques) tend à adopter sa propre définition. Ainsi, en microscopie, dans un milieu d'indice n (huile ou eau), l'ouverture est définie comme $N = n \sin \theta$; elle contribue à améliorer la résolution des détails, d'où l'intérêt d'un milieu d'indice élevé. En photo, quand on dit « ouvrir le diaphragme à $f/8$ », on exprime que le diamètre du diaphragme est un huitième de la distance focale.

- J'ai récupéré, dans un vieil appareil de laboratoire, une lentille de gros diamètre ($2R = 22\text{ cm}$) et de très grande ouverture numérique ($f = 12\text{ cm}$, soit $N = 0,68$). Elle est faite de cercles concentriques, comme les lentilles des phares marins, des projecteurs de salles de théâtre, ou celles placées sur la vitre arrière de certains autobus pour permettre au conducteur de mieux voir derrière ; on appelle cela une « lentille de Fresnel ». Elle ne fait pas de belles images mais elle permet d'enflammer le papier très rapidement : non seulement du papier noir (c'est tellement facile qu'on n'a même pas besoin de bien focaliser l'image du Soleil), mais aussi du papier de couleur claire. En revanche, même avec une telle lentille, le papier très blanc refuse toujours désespérément de s'enflammer.
- Indépendamment de l'étude géométrique présentée ici, on peut démontrer physiquement que, même si on concentre beaucoup le flux lumineux, la température du papier ne peut pas être plus élevée que celle de la source [3]. Comme ici la source est le Soleil ($5,8 \cdot 10^3\text{ K} \pm 1\%$, voir page 141), on a beaucoup de marge, et cette limitation ne doit pas nous émouvoir.

Ouvertures. Avec une discussion similaire à celle de l'exercice 12, discutez le rôle des divers mécanismes par lequel le papier évacue de l'énergie : rayonnement réémis, convection par l'air, conduction vers les parties de la feuille qui ne sont pas éclairées. Estimez comment T varie avec le temps, dans chacun des cas suivants :

- Quand la tache est entièrement noircie. Discutez si ci-dessus il était légitime de négliger la réémission.
- Quand on a tracé juste un point noir sur la feuille, avec la pointe d'un stylo à bille. Montrez qu'on trouve un temps d'inflammation à peu près conforme à l'expérience, c'est-à-dire typiquement une à trente secondes selon la taille du point noir, la taille de la loupe et la météo du jour.
- Quand la feuille est d'un blanc immaculé. Montrez que même si l'on est très patient on n'atteint jamais le seuil d'inflammation $T_i \approx 500\text{ K}$. Montrez même que s'il y a un peu de vent la température ne s'élève quasiment pas.

Discutez ce que vous ressentez quand, en plein été, vous portez des vêtements noirs ? Et des vêtements blancs ? Quelle est la différence entre une voiture claire et une voiture sombre (voir page 141) ? Pouvez-vous faire le lien avec le « radiomètre », ce petit gadget où des ailettes tournent sous l'effet de la différence de température (et donc de pression de l'air à leur voisinage) entre leurs deux faces, peintes d'un côté en noir et de l'autre en blanc ? Pouvez-vous expliquer pourquoi des plaques de neige (névés) peuvent subsister en montagne pendant des mois sans fon-

dre, malgré le Soleil ? Et pourquoi elles fondent plus si la neige est sale, s'il y a un caillou sur la neige, voire un rocher ou un arbre ?

Sources et références

La température d'inflammation est proche de 505 K, soit 232 °C ou 451 °F, si l'on en croit le titre du roman de Ray Bradbury où l'on brûle les livres [1].

Tintin allume la pipe du capitaine Haddock avec une loupe, de la même façon que leur bûcher sera allumé [2]. Dans Jules Verne, un voyageur polaire dépourvu d'allumettes utilise une lentille de glace pour enflammer de l'amadou [4].

- [1] R. BRADBURY. *Fahrenheit 451*. Gallimard, Folio Science-Fiction, Paris, 2000.
- [2] HERGÉ. *Les aventures de Tintin – Le temple du Soleil*. Casterman, Tournai, 1976.
- [3] L. LANDAU et E. LIFCHITZ. *Physique statistique*. Mir., Moscou, 1967. Chapitre 5, paragraphe 60.
- [4] J. VERNE. Voyages et aventures du capitaine Haterrras. Réédité par exemple dans « Jules Verne – Les romans de l'eau », Omnibus, Paris, 2001.

Corrigé 21 La pierre fine des Celtes (Énoncé à la page 35)

➤ Question 21.1.

Première approche. Cet objet choque notre intuition car il semble violer à la fois la thermodynamique et le principe fondamental de la dynamique. Examinons cela.

Thermodynamique. On fournit de l'énergie mécanique au début, sous forme d'énergie cinétique de rotation. Le seul degré de liberté bien visible, c'est la rotation autour d'un axe vertical. L'énergie stockée dans ce degré de liberté décroît, s'annule, puis ré-augmente quand l'anagyre part dans le sens trigonométrique (voir la figure 79). Qu'en conclure ?

Cela implique nécessairement que l'énergie mécanique est transitoirement stockée dans un autre degré de liberté. Comment le voit-on ? Par les oscillations de tangage. Elles stockent l'énergie mécanique sous forme d'énergie potentielle de pesanteur et d'énergie cinétique de rotation par rapport à un axe horizontal (voir la figure 80). Au total, l'énergie mécanique décroît toujours (voir la figure 79). C'est tout à fait normal du point de vue de la thermodynamique, aucun principe n'est violé, et il n'y a donc pas besoin d'invoquer de source d'énergie (voir exercice 22).

Dynamique. Initialement, le moment cinétique $\vec{\sigma}$ de l'anagyre (pris en son barycentre G) a une composante visible (verticale) nettement négative. Elle s'annule, et pour finir devient positive. Or nous savons bien qu'en l'absence de moments de forces extérieures, le moment cinétique $\vec{\sigma}$ se conserve. Qu'en conclure ?

La conclusion est que les forces extérieures doivent avoir un moment non nul en G . Or l'inventaire des forces extérieures est vite fait : il y a le poids, dont le

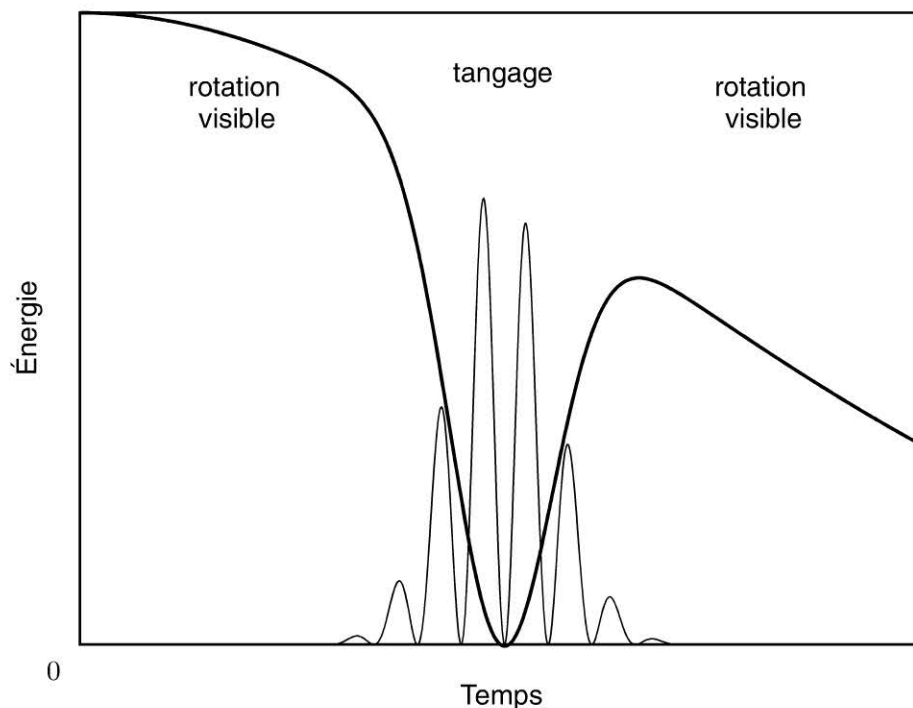


Figure 79 Allure de l'énergie mécanique en fonction du temps

En trait épais : énergie mécanique de rotation visible (c'est-à-dire l'énergie cinétique, puisqu'il n'y a pas d'énergie potentielle dans ce degré de liberté).

En trait pointillé : énergie mécanique totale du tangage

(l'énergie cinétique de rotation du tangage est représentée en trait fin).

L'énergie mécanique totale de l'anagyre (non représentée) est la somme de ces deux termes : elle décroît régulièrement.

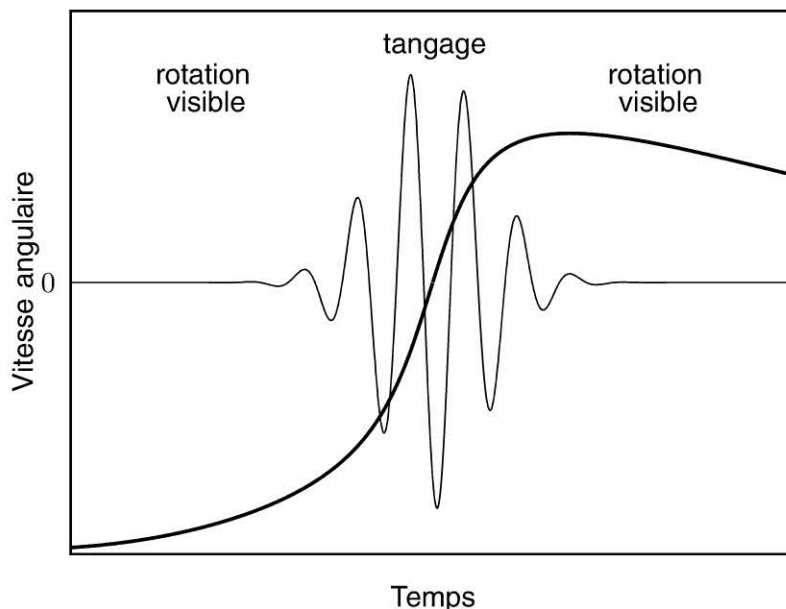


Figure 80 Allure des vitesses angulaires de rotation : autour de l'axe vertical (rotation visible) en trait épais, autour de l'axe horizontal (tangage) en trait fin.

moment en G est toujours nul ; les frottements dus à l'air, qui s'opposent à la rotation, donc ramènent la composante visible de $\vec{\sigma}$ vers 0 ; et la réaction de la table, seul candidat possible.

Est-ce possible que la table fasse tourner un objet avec lequel elle n'a qu'un seul point de contact ? Là encore, pas de problème, même si cela nous surprend [1] ; c'est bien ce qui se passe quand par exemple un joueur de billard ou de ping-pong donne de l'effet à sa boule ou à sa balle. Il suffit que la force de contact ait une composante tangentielle, ce qui est tout à fait possible, et réalisé dès lors qu'il y a des frottements solides.

Symétries. Cependant, nous ne voyons pas pourquoi la réaction de la table ferait tourner l'anagyre plutôt dans le sens trigonométrique que dans le sens horaire. En effet, la table a l'air bien symétrique. Conclusion : l'anagyre doit receler une asymétrie essentielle, que nous percevons mal. C'est là le fond du problème. De quelle asymétrie peut-il s'agir ?

- On peut caractériser la distribution de masse d'un solide par sa *matrice d'inertie* (voir sa définition à l'équation (240)). Elle est symétrique, réelle et positive. Elle est donc diagonalisable dans une base orthogonale. Comme tout solide, l'anagyre est donc caractérisé par trois moments d'inertie, autour de trois axes principaux orthogonaux les uns aux autres.
- Un solide est aussi caractérisé par sa *géométrie* : la forme de sa surface. Le point de contact avec la table est caractérisé par deux rayons de courbure principaux, également sur deux directions orthogonales, puisque résultant de la diagonalisation de la matrice de courbure, elle aussi symétrique, réelle et positive.
- Pour un objet sympathiquement symétrique et homogène, les axes de symétrie géométriques (Δ, δ) et les axes d'inertie (Δ', δ') sont dans les mêmes directions. Mais ce n'est pas une obligation. Pour un objet quelconque, donc qui a une asymétrie, ces axes n'ont aucune raison d'être confondus (voir la figure 81).

Pour réaliser cette asymétrie sans qu'elle soit visible de l'extérieur (voir « Notes »), deux cavités sont creusées dans le corps de l'anagyre. Elles sont situées de part et d'autre du barycentre, donc elles ne modifient pas sa position. En revanche, elles changent complètement les propriétés de l'anagyre quand il tourne.

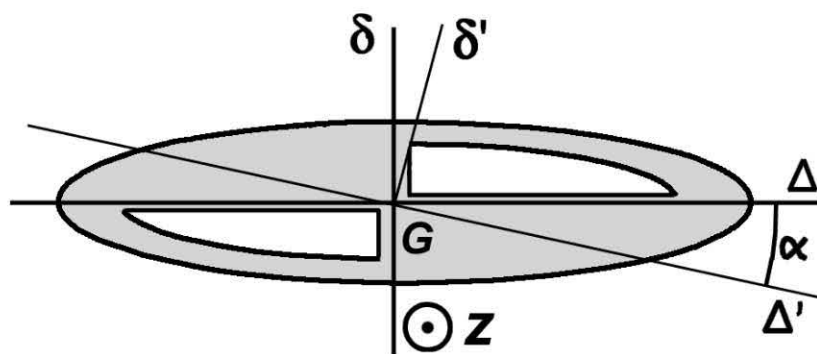


Figure 81 Différence entre les axes principaux d'inertie Δ', δ' qui caractérisent la distribution de masse de l'anagyre, et les axes de symétrie Δ, δ de sa forme.

L'angle α entre ces axes est petit ($1,72^\circ$ dans celui de la référence [2]), mais non nul ; sur ce schéma, on l'a exagéré.

En résumé, la clef du comportement de l'anagyre réside dans le décalage entre l'inertie et la géométrie. Il ne viole aucun principe : s'il nous surprend, c'est seulement que nous n'y sommes pas habitués. Il reste encore à faire l'essentiel du travail, c'est-à-dire comprendre physiquement comment une telle asymétrie permet à la réaction de la table de coupler la rotation visible et le tangage.

► Question 21.2.

Analyse qualitative. Un solide est décrit par 6 coordonnées : 3 de position et 3 d'orientation. Il faut écrire complètement les équations de la dynamique, elles donnent le bon nombre d'informations : la résultante dynamique donne trois équations pour la vitesse \vec{v} du barycentre G , le moment dynamique en donne trois autres pour la vitesse angulaire de rotation $\vec{\omega}$. Naturellement, ici, il n'y a pas la moindre symétrie qui pourrait alléger ces équations.

Simplifications. On propose de se restreindre au cas conservatif, sans tenir compte du travail des frottements :

- Le frottement solide est grand mais il ne travaille pas si le mouvement se fait sans glissement. Cela nécessite que le coefficient de frottement statique f de l'anagyre sur la table soit suffisamment grand. En effet, il faut que la réaction de la table \vec{R} reste dans un cône, dont la largeur est donnée par f . On va commencer ici par étudier ce cas sans glissement, c'est-à-dire f assez grand : il devrait être plus facile, car il permet d'avoir des équations cinématiques et non dynamiques (voir page 7).
- Le frottement dû à l'air sera négligé ici. En effet, tout ce qu'il peut faire, c'est contribuer à diminuer l'énergie mécanique totale, et diminuer la rotation visible. Il s'oppose donc doublement aux propriétés intéressantes du mouvement de l'anagyre. Mieux vaut donc le négliger dans un premier temps si l'on veut comprendre comment l'anagyre change de sens.

► Question 21.3.

Notations. Attention, il faut distinguer le *référentiel* et le *repère* :

- Le référentiel de la table est galiléen, celui lié au solide est animé de mouvements de translation et de rotation divers. Pour éviter des forces d'inerties inextricables, il est à peu près impératif de se placer dans le référentiel de la table. On notera dx/dt la dérivée par rapport au temps d'une quantité x dans ce référentiel.
- Pour le choix du repère, en revanche, il est à peu près impératif d'exprimer les vecteurs dans un système de coordonnées liées au solide : en effet, la forme du solide, et sa distribution de masse, restent alors des quantités constantes. On prendra comme origine le barycentre G , et des axes liés aux axes principaux d'inertie Δ' , δ' , z . On notera \dot{x} la dérivée par rapport au temps d'une quantité x repérée dans ce système de coordonnées.

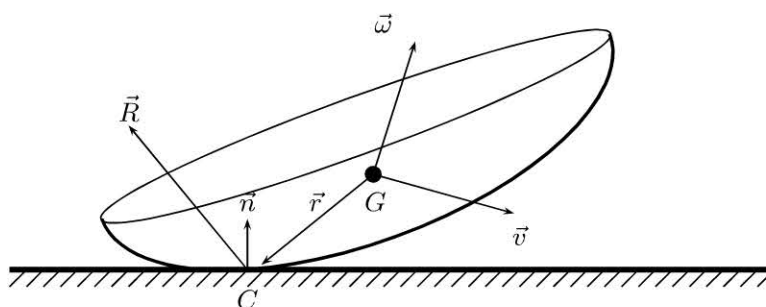


Figure 82 Notations pour le mouvement de l'anagyre.

- Pour la dérivée par rapport au temps d'un vecteur \vec{x} , le changement de repère s'écrit :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \wedge \vec{x}. \quad (239)$$

Faute de symétries, on doit recourir à de nombreuses notations (voir la figure 82), dont nous avons déjà introduit la plupart :

- géométriques : le barycentre G , le point C du solide en contact avec la table, sa position $\vec{r} = \overrightarrow{GC}$, le vecteur unitaire \hat{n} normal en C ;
- cinématiques : la vitesse \vec{v} du barycentre, la rotation instantanée $\vec{\omega}$, la rotation visible $\vec{\omega} \cdot \hat{n}$;
- cinétiques : le moment cinétique $\vec{\sigma}$, sa composante visible $\vec{\sigma} \cdot \hat{n}$;
- inertielles : la masse M et la matrice d'inertie \mathcal{I} diagonale (ses trois composantes sont les trois moments d'inertie principaux $I_1 < I_2 < I_3$) définie par la relation linéaire entre $\vec{\omega}$ et $\vec{\sigma}$:

$$\vec{\sigma} = \mathcal{I} \cdot \vec{\omega} ; \quad (240)$$

- dynamiques : le poids $-Mg \hat{n}$, la réaction de la table \vec{R} , le coefficient de frottement statique f .

De même que les axes de symétrie géométriques et les axes d'inertie ne sont pas parallèles en général (voir la figure 81), $\vec{\omega}$ et $\vec{\sigma}$ ne sont pas parallèles non plus.

Équations cinématiques. Commençons par les équations cinématiques, celles qui concernent \vec{r} , \hat{n} , \vec{v} et $\vec{\omega}$:

- Exprimons que le solide est toujours en contact tangent avec la table. Cela donne une relation entre \vec{r} et \hat{n} qui dépend de la forme exacte de l'objet. Pour l'instant, évitons de l'écrire explicitement, et contentons-nous d'une expression générale :

$$\vec{r} = \vec{r}(\hat{n}), \quad (241)$$

ou bien :

$$\hat{n} = \hat{n}(\vec{r}). \quad (242)$$

Ces équations (241) et (242) sont presque équivalentes. L'équation (241) est définie si la surface est convexe (si elle était plate ou concave, plusieurs points auraient la même normale). L'équation (241) est définie si la surface est régulière (s'il y avait un angle, il y aurait plusieurs normales au même point). Ici, l'anagyre est une surface convexe et régulière, donc les équations (241) et (242) sont exactement équivalentes : on choisira celle qui nous sera la plus utile.

Si l'on connaît l'expression analytique de la surface de l'objet, sous la forme d'une équation du type :

$$g(\vec{r}) = \text{constante},$$

alors \hat{n} est le vecteur unitaire dans la direction du gradient de g , donc l'équation (242) s'écrit :

$$\hat{n}(\vec{r}) = -\frac{\vec{\nabla} g(\vec{r})}{|\vec{\nabla} g(\vec{r})|}. \quad (243)$$

Elle est difficile à écrire explicitement, même pour une forme simple (voir « **Ouverture** »).

- La table est plate et lisse, donc le vecteur normal \hat{n} est constant dans le repère de la table : $d\hat{n}/dt = 0$. Dans le repère du solide, il n'est donc pas constant. Par l'équation (239), sa variation s'écrit :

$$\dot{\hat{n}} = -\vec{\omega} \wedge \hat{n} = \hat{n} \wedge \vec{\omega}. \quad (244)$$

- Enfin, la condition de non-glissement, c'est-à-dire la nullité de la vitesse en C , s'écrit :

$$\vec{v} = \vec{r} \wedge \vec{\omega}. \quad (245)$$

Équations dynamiques. Les équations dynamiques sont toutes celles qui concernent les forces et les accélérations :

- Résultante dynamique :

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{R} - Mg\hat{n}. \quad (246)$$

- Moment dynamique, pris en G :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{R}, \quad (247)$$

où $\vec{\sigma}$ est relié à $\vec{\omega}$ de façon linéaire, *via* la matrice d'inertie (équation (240)). Soit, avec l'équation (239) :

$$\frac{d(\mathcal{I} \cdot \vec{\omega})}{dt} = \overbrace{(\mathcal{I} \cdot \dot{\vec{\omega}})}^{\cdot} + \vec{\omega} \wedge (\mathcal{I} \cdot \vec{\omega}). \quad (248)$$

Puisque \mathcal{I} est constante dans le repère lié au solide, $\dot{\mathcal{I}} = 0$, on obtient finalement (équations (240), (247) et (248)) :

$$\mathcal{I} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge (\mathcal{I} \cdot \vec{\omega}) = \vec{r} \wedge \vec{R}. \quad (249)$$

► Question 21.4.

Analyse qualitative. En observant ces équations dynamiques (les équations (246) et (249)), peut-on comprendre comment la rotation passe d'un axe à l'autre, puis revient ? Quels sont les termes qui sont nuls pour un objet symétrique et qui deviennent importants pour l'anagyre ? Reprenons ces deux équations.

Couplage des rotations. Dans l'équation (249), le terme important est $\vec{\omega} \wedge (\mathcal{I} \cdot \vec{\omega})$. Il peut coupler les différentes composantes de la rotation :

- Pour un objet à symétrie sphérique, où $(\mathcal{I} \cdot \vec{\omega})$ est parallèle à $\vec{\omega}$, il est nul.
- Pour un objet à symétrie cylindrique, comme une toupie, il est responsable de l'effet gyroscopique.
- Enfin, pour un objet dont les trois moments d'inertie sont différents, comme l'anagyre, il montre que la rotation selon δ' peut devenir instable, au profit de l'axe d'inertie dont le moment est le plus grand (z) ou le plus petit (Δ').

Comparaison avec d'autres systèmes.

- Est-ce que le terme $\vec{\omega} \wedge (\mathcal{I} \cdot \vec{\omega})$ suffit à expliquer le comportement de l'anagyre ? Non, car il prédit uniquement la déstabilisation de la rotation selon l'axe δ' ; une perturbation initiale, quel que soit son signe, croît exponentiellement avec le temps.

Cela intervient lorsqu'on lance en l'air une boîte d'allumette ou une raquette de tennis (voir le « théorème de la raquette de tennis » dans la référence [3]). Mais ce n'est pas ce que l'on observe : ici, la direction du vecteur rotation passe d'un axe à l'autre de façon prédéfinie, reproductible.

- Les références [1, 4] mentionnent une analogie avec un kayak, qui aurait une pagaie à l'avant gauche et une pagaie à l'arrière droite. Quand un tel kayak tangue, les rames touchent l'eau alternativement, fournissant une force de moyenne nulle mais un moment de moyenne non nulle.

Cette analogie permet de se représenter le passage du tangage à la rotation trigonométrique de l'anagyre. En revanche, dans le cas du kayak, ce qui favorise le sens trigonométrique, c'est que la force de frottement dépend explicitement du

sens de rotation : cette analogie n'explique pas le rôle que joue la distribution de masse dans l'anagyre.

Causes de l'inversion. Il faut donc tenir compte des causes physiques de l'inversion de sens de l'anagyre : de sa forme, et de la réaction de la table. Contrairement au moment en G du poids, toujours nul, le moment de la réaction \vec{R} peut avoir un effet intéressant sur $\vec{\omega}$ via l'équation (249). Or \vec{R} n'est pas trivial. À travers l'équation (246), \vec{R} dépend de \vec{v} , qui peut avoir des composantes dans les trois directions à cause de la forme de l'anagyre.

L'article [1] considère un cas où l'on part d'un anagyre lâché sans vitesse initiale. Par exemple, lâchons-le en position inclinée, pour qu'il tangué (figure 22(b)), et examinons ce qui peut le faire passer en rotation visible (figure 22(c)). Tandis que l'anagyre tangué, la réaction varie : en général, $\vec{R}(t)$ n'est pas nul. En moyenne sur une période, le point G n'a pas d'accélération, ce qui signifie que \vec{R} est nul en moyenne :

$$\langle \vec{R}(t) \rangle = 0.$$

En revanche, le point de contact C se déplace de part et d'autre de G , donc rien n'interdit au moment de \vec{R} d'avoir une moyenne non nulle :

$$\langle \vec{r}(t) \wedge \vec{R}(t) \rangle \neq 0.$$

Autrement dit, la réaction n'est nulle qu'en moyenne ; rien ne lui interdit de mettre l'anagyre en rotation. C'est la clef du comportement de l'anagyre !

► Question 21.5.

Analyse qualitative. Pour aller plus loin, il faudrait calculer directement la moyenne $\langle \vec{r}(t) \wedge \vec{R}(t) \rangle$ du moment de la réaction, à partir des équations (240) à (249). C'est difficile.

À la place, on peut déjà essayer d'écrire les équations sous une forme plus compacte, qui se prête mieux à une discussion, ou à une résolution numérique. C'est ce que fait l'article [2] ; ensuite, il compare ses mesures expérimentales et ses simulations numériques.

Pour cela il faut éliminer \vec{R} , qui est inconnue, entre les équations (246) et (249) :

$$\mathcal{I} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge (\mathcal{I} \cdot \vec{\omega}) = \vec{r} \wedge \left[M \frac{d\vec{v}}{dt} + Mg\hat{n} \right]. \quad (250)$$

Revenons alors dans le repère lié au solide, plus simple ; pour cela, utilisons l'équation (239) :

$$\mathcal{I} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge (\mathcal{I} \cdot \vec{\omega}) = M \vec{r} \wedge \left[\dot{\vec{r}} \wedge \vec{\omega} + \vec{r} \wedge \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} + g\hat{n} \right]. \quad (251)$$

Finalement, en utilisant au choix l'équation (241) ou l'équation (242), la forme la plus compacte pour écrire les équations (240) à (249)) est :

$$\frac{\mathcal{I} \cdot \dot{\vec{\omega}}}{M} - \vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \dot{\vec{\omega}}) = \vec{r} \wedge \left[\dot{\vec{r}} \wedge \vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{\omega}) + g\hat{n} \right] - \vec{\omega} \wedge \left(\frac{\mathcal{I}}{M} \vec{\omega} \right), \quad (252)$$

$$\vec{r} = \vec{r}(\hat{n}), \quad (253)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}(\hat{n}, \vec{\omega}). \quad (254)$$

Vérifications.

- Homogénéité : \mathcal{I}/M est homogène à une longueur au carré, et g est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, donc les deux membres de l'équation (252) sont bien en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.
- Signe et comportement : je ne sais pas comment on peut les vérifier. Je sais juste que les auteurs de l'article [2] utilisent le système d'équations (252)-(254) pour faire des simulations, et qu'elles sont en très bon accord avec leurs mesures expérimentales.

Commentaires. À défaut de résoudre ce système d'équations (252)-(254), on peut le commenter :

- Ce problème est purement géométrique : on pourrait complètement l'adimensionner en utilisant une échelle de taille caractéristique R_0 et une pulsation caractéristique $\sqrt{g/R_0}$, de même que pour un pendule pesant, puisque la masse s'élimine.
- Pour pouvoir déterminer comment évolue $\vec{\omega}$, on a regroupé dans le membre de gauche de l'équation (252) tout ce qui concerne $\dot{\vec{\omega}}$. On constate que tout est linéaire en $\dot{\vec{\omega}}$. En revanche, le membre de droite, qui fait évoluer $\vec{\omega}$, est fortement non-linéaire. On ne peut pas le linéariser et en prendre une moyenne, car les équations (253) et (254) sont trop compliquées.
- Avec ses six degrés de liberté, l'anagyre a une foule de comportements possibles, en particulier chaotiques, et les techniques usuelles de physique non-linéaire marchent assez mal. Il y a une telle imbrication entre différents effets qu'il est difficile d'en enlever un sans tout perturber.

Notes. Est-ce que l'anagyre est un exemple exotique ou une situation commune ? Certes, dans notre vie quotidienne moderne, et aussi dans l'enseignement académique, on rencontre beaucoup d'objets symétriques. Mais la plupart des objets naturels sont aussi asymétriques que l'anagyre. Ainsi, de quelconques pierres taillées, comme celles qu'un archéologue faisait négligemment tourner dans les années 1970, se sont révélées être capables de changer de sens.

Cette remarque a réveillé l'intérêt pour les anagyres, connus depuis longtemps (le premier article date de 1896 [5]), et désormais rebaptisés « pierres celtiques ». Jearl Walker leur a fait de la publicité en 1979 [6], et les progrès des ordinateurs ont permis de faire des simulations dans les années 1980 [2].

Devenus à la mode, les anagyres ont été fabriqués sous différentes formes : en plâtre [1] ou en résine, avec des formes telles que la demi-banane ; ou bien avec des demi-coquilles de noix de coco ou d'œufs lestées par des chewing-gums [1]. C'est donc facile à faire chez soi : l'essentiel est d'avoir une forme qui a deux rayons de courbure différents, et de la lester de façon asymétrique. Certains anagyres n'ont pas de sens de rotation particulier, et peuvent s'inverser une dizaine de fois [2].

L'anagyre mentionné ici (figures 22 et 81, voir p. 11) est un peu particulier : sa forme paraît symétrique vue de l'extérieur, et l'asymétrie de la distribution de masse est dissimulée au spectateur. Peu performant en tant qu'anagyre, car il fait au maximum une seule inversion, son intérêt est d'être joli et mystérieux.

Ouvertures.

- Essayez d'explicitier les équations qui font intervenir la forme de l'anagyre : équations (243), (253) et (254). Pour cela, prenez la forme qui facilite les calculs, c'est-à-dire un paraboloïde. En effet, la forme exacte n'importe pas : voir l'article [2] et les références qu'il cite. Ce qui est important, c'est seulement de ne pas avoir de symétrie autour d'un axe, pour avoir deux rayons de courbure différents.
- J'ai trouvé par hasard un système qui présente une inversion de sens analogue, mais en translation cette fois. Je faisais rouler machinalement un cylindre creux et léger, en l'occurrence un gros rouleau de ruban adhésif de 10 cm de diamètre. Puis j'ai posé à l'intérieur un petit rouleau dense et mince, en l'occurrence une pile de 1,5 V. En faisant rouler le gros rouleau, on le voit qui avance en roulant, puis s'immobilise, et repart en marche arrière. Or la seule force qui a pu permettre cela, ce sont les frottements sur la table !

À titre d'exercice, vous pouvez calculer exactement le mouvement de ce système. Il est nettement plus facile à étudier que l'anagyre, bien qu'il soit constitué de deux solides indépendants. Existe-t-il un vrai analogue en translation de l'anagyre, c'est-à-dire un solide d'un seul tenant qui avance, s'arrête et revienne en arrière ?

Sources et références

Il y a deux types d'articles disponibles. Ceux de la littérature spécialisée écrivent les équations complètes et simulent numériquement leurs solutions. Ceux de vulgarisation sont obligés d'ultra-simplifier et d'analyser grossièrement en agitant les mains. Il y a un fossé entre les deux, qu'il faudrait combler pour pouvoir dire qu'on a compris le problème.

L'article [2], assez complet, s'y emploie de son mieux. Il est bourré de remarques physiques, malheureusement dispersées. On peut consulter en particulier le début et les pages 169, 172 et 182.

- [1] J. SIMERAY. L'anagyre. *Pour la Science*, volume 255, janvier 1999, pages 108-109. Cet article, accompagné par le courrier des lecteurs qu'il a suscité (« Analogie pour l'anagyre », P.-G. de Gennes, Tribune des lecteurs, *Pour la Science*, volume 256,

février 1999, page 6) et par des photos d'anagres asymétriques, constitue le troisième chapitre de [4].

- [2] A. GARCIA et M. HUBBARD. Spin Reversal of the Rattleback: Theory and Experiment. *Proceedings of the Royal Society London A*, volume 418, 1998, pages 165-197.
- [3] F. GRANER. *Petits problèmes de physique – première partie*. Springer, Heidelberg, 1998. Exercice R.
- [4] *Yo-yo, billard, boomerang : la physique des objets tournants*. Bibliothèque Scientifique Belin – Pour la Science, Paris, 2001.
- [5] G. WALKER. *Journal of Pure and Applied Mathematics*, volume 28, 1896, pages 175-184.
- [6] J. WALKER. Expériences d'amateur. *Pour la Science*, volume 26, décembre 1979, pages 109-114.

Corrigé 22 Sans cesse et sans fin (Énoncé à la page 36)

► Question 22.1.

Mécanique : rotation. En ce qui concerne la rotation, pas grand-chose à dire : c'est une toupie classique, sa stabilité est liée à l'effet gyroscopique. Son axe fait avec la verticale un angle, non nul, mais faible et presque constant dans le temps.

La vitesse angulaire de rotation initiale est celle qu'on peut obtenir en lançant une toupie entre le pouce et l'index. Prenons quelques valeurs typiques. Disons qu'en un quart de seconde on déplace les doigts de 4 cm ; si l'axe de la toupie fait 4 mm de diamètre, son périmètre est 1,2 cm, donc on lui imprime environ trois tours en un quart de seconde : la rotation initiale est donc de l'ordre de dix tours par seconde.

Le moment cinétique de la toupie se conserve à peu près. En l'absence du socle, il décroît sous l'effet du frottement, et s'annule en environ une minute, soit après un millier de tours.

► Question 22.2.

Mécanique (suite) : translation. Le mouvement de translation de G est complètement découplé de la rotation.

Puisque l'axe de la toupie fait avec la verticale un angle à peu près constant, le centre de masse G de la toupie est toujours à peu près à la même hauteur au-dessus du socle. On se ramène donc pour G à un problème à seulement deux degrés de liberté : par exemple ses coordonnées x_G et y_G dans le plan horizontal.

Sa coordonnée verticale z_G est déterminée par l'équation de la surface du socle. Le point G est donc un oscillateur dans le potentiel de pesanteur formé par le socle. Pour plus de détails, voir la question 22.5.

► Question 22.3.

Thermodynamique. Sur la table, la toupie subit des frottements et s'arrête en une minute ou deux. Sur le socle, elle continue pendant des heures ou des jours : est-ce parce que les frottements ont été supprimés ? Certainement pas. Une preuve : la toupie « ronronne ». Elle fait du bruit, autrement dit elle convertit de l'énergie mécanique en énergie acoustique qui rayonne, et finira par se dissiper en chauffant l'atmosphère (voir page 6). Les pertes d'énergie mécanique sont donc au moins aussi importantes quand la toupie est sur son socle. Que peut-on en conclure ?

La conclusion est que nécessairement, pour entretenir ce mouvement permanent, malgré les pertes il doit y avoir une *source d'énergie* quelque part : une manière d'apporter de l'énergie mécanique à la toupie. Est-ce qu'un aimant est une source d'énergie ? Non. Il n'y a pas trente-six solutions : sans hésiter, on peut deviner que le socle doit être une boîte à pile.

Et alors, que doit-il contenir d'autre qu'une pile ? Pour pouvoir agir sur l'aimant de la toupie, il faut que la pile puisse créer un champ magnétique, donc il faut une bobine. Mais une pile et une bobine se comportent comme un aimant permanent : c'est insuffisant pour fournir l'énergie nécessaire à l'entretien du mouvement. Il doit donc y avoir autre chose que de simples composants passifs.

► Question 22.4.

Électromagnétisme. En effet, on peut démonter le socle, et on y découvre, dissimulés sous le centre, les trois éléments attendus : une pile, une bobine, et « autre chose », en l'occurrence quelques composants électroniques.

Mais quel est leur rôle ? Le rôle de l'électronique doit être de rendre le circuit actif, pour le distinguer radicalement d'un aimant permanent. À chaque instant l'électronique doit détecter l'orientation de la toupie, et créer un champ magnétique convenablement orienté pour entraîner la toupie en rotation, avec un couple moteur toujours positif. Par conséquent, au moins trois composants sont nécessaires :

- un détecteur, pour suivre la toupie ;
- un déphaseur, pour que le champ créé soit toujours un peu en avance sur la toupie ;
- et un amplificateur, qui utilise l'énergie de la pile, pour que le champ créé soit suffisamment costaud.

Voilà tout ce qu'on peut dire sans rien connaître. Pour plus de détails, voir « **Notes** ».

► Question 22.5.

Simplifications. On peut proposer les simplifications suivantes :

- Découpler la translation de la rotation, comme on l'a dit.
- Écrire qu'en première approximation l'énergie mécanique est constante. En effet, elle diminue régulièrement à cause des frottements ; quand elle diminue trop, la

toupie se retrouve près du centre, et grâce à la pile elle regagne ce qu'elle a perdu. En régime permanent, l'énergie mécanique garde donc une moyenne constante, et ses fluctuations relatives sont faibles.

- Le socle étant peu concave, on peut approcher sa forme, près de son minimum, par une parabole, symétrique autour d'un axe vertical.

Notations. Si l'on note $z = (x^2 + y^2)/2R$ l'équation de cette parabole, et si on dit que G reste toujours à peu près à la même hauteur au-dessus de la pointe M de la toupie (en négligeant l'effet de la variation d'inclinaison de la toupie, voir la figure 83), alors G vérifie :

$$z_G(r) - z_G(0) = \frac{x^2 + y^2}{2R} = \frac{r^2}{2R}. \quad (255)$$

Que représente R ? Au centre du socle, la courbure vaut, dans chacune des deux directions :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{R},$$

donc R est le rayon de courbure au centre du socle, dans l'une ou l'autre direction.

Mise en équations. Si l'on n'étudie que la translation, supposée découplée de la rotation, vaut-il mieux utiliser l'énergie ou la force (voir page 7) ? Comme le problème est à deux degrés de liberté, on a envie d'utiliser la force. Par ailleurs, comme le potentiel est harmonique, on a aussi envie d'utiliser l'énergie. D'où les deux expressions possibles :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + mgz_G &= \text{constante}, \\ m \ddot{\vec{r}} &= -mg \frac{\vec{r}}{R}, \end{aligned} \quad (256)$$

qui sont équivalentes si on tient compte de l'équation (255).

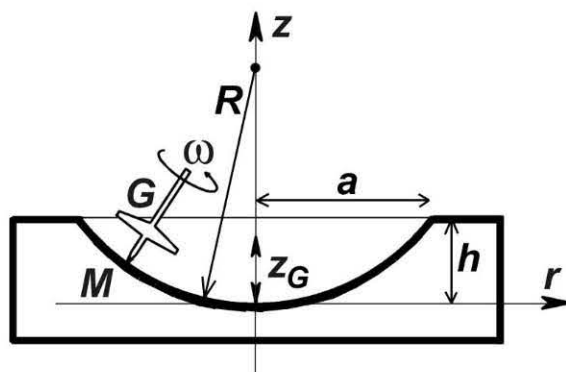


Figure 83 Notations pour l'étude du mouvement de translation du barycentre G .
Sur cette figure la concavité a été volontairement exagérée.

Résolution. L'une ou l'autre de ces deux expressions se ramène à une oscillation harmonique :

$$\begin{aligned}x &= x_0 \cos(\omega t + \varphi_x), \\y &= y_0 \cos(\omega t + \varphi_y), \\ \omega^2 &= \frac{g}{R}.\end{aligned}\tag{257}$$

Vérifications.

- Homogénéité : le membre de droite de l'équation (257) est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2} / \text{m}$, donc il est bien en s^{-2} . Notez que R est la seule longueur importante de ce problème.
- Les signes sont bons : on a ici la même équation que pour un ressort, ou un pendule pesant stable dans sa version linéarisée.
- Comportement : plus R diminue, c'est-à-dire plus le socle est incurvé, plus il a d'effet sur la toupie, et plus ω augmente.

La toupie se comporte donc comme un oscillateur harmonique à deux dimensions, avec un bon facteur de qualité (voir page 10), et une source d'énergie qui l'entretient. Cela ressemble à un pendule pesant (stable, dans sa version linéarisée) à deux dimensions, comme celui du professeur Tournesol. À noter que le potentiel harmonique est (avec le potentiel coulombien en $1/r$) le seul potentiel à deux dimensions qui autorise des courbes fermées, donc des trajectoires périodiques : en l'occurrence, des ellipses.

Valeurs numériques. On peut estimer facilement la valeur de R en regardant le socle. Ses dimensions sont : rayon $a = 3 \text{ cm}$, concavité $z_G(a) - z_G(0) = h = 3 \text{ mm}$, or l'équation (255) donne :

$$h = \frac{a^2}{2R}.$$

On en tire donc :

$$R = \frac{a^2}{2h} = \frac{(3 \text{ cm})^2}{2 \times (0,3 \text{ cm})} = 15 \text{ cm} = 0,15 \text{ m}.$$

Finalement on obtient :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} = 8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$

soit une période $2\pi/\omega = 0,8 \text{ s}$, compatible avec ce qu'on observe.

Notes. En fait, ce type de toupie est une version esthétique et amusante d'un moteur assez classique, appelé « sans contact » ou « sans balai ». C'est celui qu'on trouve par exemple dans les ventilateurs d'ordinateurs. Peu puissant, il consomme peu,

mais surtout il n'y a pas besoin de pièce mécanique qui assurerait les contacts électriques : donc moins de bruit, de poussière, de parasites électriques, d'usure, d'entretien, de pannes [1].

En pratique, le socle contient un capteur à effet Hall qui détecte la présence et l'orientation de l'aimant de la toupie, et un transistor qui commute le sens du champ dans la bobine pour fournir toujours un couple moteur. Bien que la pile soit à courant continu, ce dispositif permet de créer un champ alternatif, qui est toujours exactement à la fréquence de rotation de la toupie, quelle qu'elle soit ! C'est un « moteur synchrone autopiloté ».

Ce type de moteur a encore un autre avantage, ici : il ne se déclenche que quand la toupie passe assez près du centre. Autrement dit, la plupart du temps, la toupie est libre et la pile ne s'use pas du tout. La pile ne sert finalement que pour réinjecter un peu d'énergie de temps en temps quand la toupie s'essoufle (ce qui a toujours lieu au centre, grâce à un petit plot placé sur le socle qui la guide vers le centre à chaque fois qu'elle a trop peu d'énergie). Cette économie est appréciable et confère à la toupie son exceptionnelle longévité : elle peut tourner sans s'arrêter pendant quinze jours !

Sources et références

[1] T. WILDI. *Électrotechnique*. De Boeck Université, Québec, 3ème édition, 2000.

Corrigé 23 La base fait planer l'aimant (Énoncé à la page 37)

► Question 23.1.

Notations. La position \vec{r} et la cote z du centre de gravité de la toupie sont repérées par rapport à une origine O , qui peut être choisie au centre de la face supérieure du socle (voir figure 84). On notera a le rayon du socle, e son épaisseur, $V = \pi a^2 e$ son volume, $\vec{M} = |M| \hat{e}_z$ son moment magnétique par unité de volume, MV son moment magnétique total qui est orienté vers le haut.

Analyse qualitative. Le champ \vec{B} a ici la symétrie cylindrique :

- Sur l'axe, $\vec{B} = B_z \hat{e}_z$ est vertical ; il est orienté vers le haut si le moment magnétique du socle est orienté vers le haut. La composante radiale est nulle.
- Hors de l'axe, \vec{B} a une légère composante radiale.

Mise en équations. Les équations de Maxwell de la magnétostatique donnent ici, dans l'air (donc en l'absence de sources) :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= 0.\end{aligned}\tag{258}$$

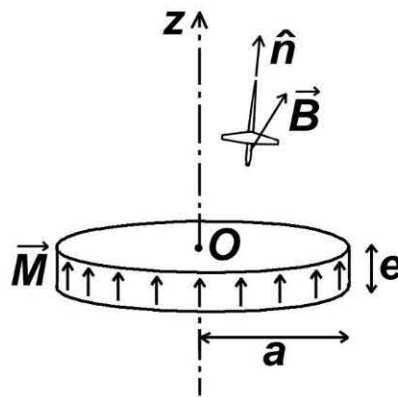


Figure 84 Notations utilisées.

On en déduit immédiatement (voir page 10) que le laplacien de \vec{B} est nul :

$$\Delta \vec{B} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{0}. \quad (259)$$

C'est une égalité vectorielle, qui est vraie pour chacune de ses composantes cartésiennes, en particulier sa composante verticale :

$$\Delta B_z = 0. \quad (260)$$

En revanche, on ne peut rien dire de particulier sur le laplacien ΔB du module du champ.

Résolution. Le socle est constitué d'une densité de dipôles uniforme \vec{M} , soit pour un volume élémentaire dV un dipôle élémentaire $d\vec{m} = dV \vec{M}$. On pourrait en déduire directement \vec{B} en intégrant sur tout le volume de la base : en ce cas, après des calculs lourds on aboutirait à l'équation (262).

Plus simplement, on peut choisir de passer par le potentiel. En effet, en l'absence de sources, l'équation (258) implique que \vec{B} dérive d'un potentiel, qu'on pourrait noter Φ , défini par :

$$\vec{B} = -\vec{\nabla} \Phi. \quad (261)$$

Comme Φ est formellement analogue au potentiel électrostatique, on peut l'appeler « potentiel magnétique ».

La contribution d'un dipôle élémentaire $d\vec{m}$ à ce potentiel Φ serait :

$$d\Phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}.$$

En intégrant sur tout le volume V de la base, qui est un disque de rayon a et d'épaisseur e , on obtient Φ :

$$\Phi(\vec{r}) = \iiint_{\text{base}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3\vec{r}'.$$

Pour simplifier le calcul, on va procéder à l'approximation $e \ll z$. En effet, bien que e/z n'est pas petit devant 1, on garde une idée de ce qui se passe physiquement. Grâce à cette approximation physique (voir page 4), on peut intégrer sur la hauteur z . On obtient alors, pour un point situé sur l'axe de symétrie (ce qui permet d'intégrer sur l'angle), une intégrale uniquement radiale :

$$\Phi(z) = \mu_0 M \frac{ez}{2} \int_0^a \frac{\rho' d\rho'}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} = \mu_0 M \frac{e}{2} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right].$$

En utilisant la définition de Φ (équation (261)), on en tire alors l'expression de \vec{B} sur l'axe :

$$B_z(z) = \mu_0 M \frac{V}{2\pi} (a^2 + z^2)^{-3/2} = \mu_0 M \frac{ea^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (262)$$

Vérifications.

- Pour vérifier l'homogénéité de l'équation (262), le plus simple est de se rappeler que $\mu_0 M$ est bien homogène à un champ magnétique. Par ailleurs, la fraction est sans dimension.
- Le signe est correct, car \vec{B} est dans le même sens que \vec{M} , donc vers le haut.
- Le comportement est correct, car à distance grande devant la taille du socle ($z \gg a$), le champ décroît en z^{-3} : plus précisément, c'est le champ du dipôle dont le moment MV est le moment total du socle.

Valeurs numériques. L'ordre de grandeur du module B est donc :

$$B(z) \approx 4\pi \times 10^{-7} \times 2 \cdot 10^5 \times \frac{[1 \times 25] \cdot 10^{-6}}{[2 \times (25 + 9)^{1,5}] \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ T}.$$

C'est effectivement l'ordre de grandeur d'un champ créé par un aimant permanent ferromagnétique. Pour un anneau percé en son centre, l'expression du champ est un peu plus compliquée (voir référence [1]). Comme le champ est proportionnel au volume du socle, son ordre de grandeur réel est à peu près deux fois plus faible : la référence [2] mesure expérimentalement $1,36 \cdot 10^{-2} \text{ T}$.

► Question 23.2.

Mise en équations. Un aimant de volume v possède un moment magnétique permanent :

$$\vec{\mu} = \vec{M} v. \quad (263)$$

Il subit la force :

$$\vec{F}_{\text{magn}} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}. \quad (264)$$

Si $\vec{\mu}$ est dans le même sens que \vec{B} , la force tend à amener l'aimant vers la région de champ fort, donc vers le socle, ce qui ne nous intéresse pas. Au contraire, si $\vec{\mu}$ est dans le sens opposé à \vec{B} , donc opposé au socle, l'aimant est repoussé vers le haut, ce que l'on souhaite. En dérivant l'équation (262), et en injectant dans l'équation (264), on trouve une force qui décroît au loin avec la distance z :

$$\vec{F}_{\text{magn}} = \mu_0 M^2 \frac{vV}{2\pi} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}}. \quad (265)$$

Pour décrire la compétition entre la répulsion magnétique (équation (265)) et le poids $\rho v g$ de l'aimant, on peut calculer leur rapport, qui est un nombre sans dimension :

$$\frac{F_{\text{magn}}}{\rho v g} = k \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}}. \quad (266)$$

Ici k est une constante qui a la dimension d'une longueur à la puissance 4. Notons-la donc L^4 :

$$k = L^4 = \frac{\mu_0 M^2 V}{2\pi \rho g} = \frac{\mu_0 M^2 e a^2}{2\rho g}. \quad (267)$$

On vérifie l'homogénéité de l'équation (267) : $\mu_0 M$ est homogène à un champ magnétique, et MV à un moment magnétique, donc $\mu_0 M^2 V$ est une énergie. Le dénominateur ρg est une force par unité de volume, donc une énergie par m^4 . L a donc bien la dimension d'une longueur.

La position d'équilibre est la hauteur z où la répulsion magnétique et le poids $\rho v g$ de l'aimant s'équilibrent. En regroupant les équations (266) et (267), on obtient la condition d'équilibre pour z :

$$\frac{(a^2 + z^2)^{5/2}}{z} = L^4. \quad (268)$$

Le membre de gauche passe par un minimum en $z = a/2$, et il vaut alors $3,5 a^4$. L'équation (268) a donc une solution si L/a vaut au moins $(3,5)^{1/4} \approx 1,4$.

Valeurs numériques. On remarque que L est indépendant du volume v de l'aimant (équation (267)). Connaissant la masse volumique ρ du matériau ferromagnétique utilisé, typiquement $7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (voir page 286), on peut calculer la valeur de L :

$$L \approx \left[\frac{4\pi \times 10^{-7} \times (2 \cdot 10^5)^2 \times 25 \cdot 10^{-6}}{2 \times 7800 \times 10} \right]^{1/4} \approx 5,3 \text{ cm.}$$

L et a sont donc du même ordre de grandeur, ce qui est correct. Si on va chercher la précision, j'ai probablement sous-estimé L , puisqu'il doit en réalité être au moins égal à $1,4a$. À cause de la puissance $1/4$, cela veut dire que j'ai fortement sous-estimé les termes qui interviennent au numérateur de l'équation (267) (voir page 3). En tout cas, cela veut donc dire qu'il est difficile de fabriquer une position d'équilibre : cela requiert une optimisation de tous les paramètres. L'équilibre s'obtient alors pour z de l'ordre de $a/2$, donc 2,5 cm, ce qui est tout à fait raisonnable.

Analyse qualitative. En outre, l'aimant subit de la part du champ le moment :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{magn}} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}. \quad (269)$$

Si on laissait l'aimant libre, ce moment tendrait à l'orienter dans le même sens que \vec{B} , donc que le socle. En ce cas, le socle l'attirerait, et l'aimant viendrait se coller dessus. C'est de là que vient son nom d'« aimant ».

À l'inverse, si vous voulez réaliser une lévitation, vous désirez que le socle et l'aimant se repoussent. Pour cela, vous aimeriez trouver un moyen de forcer l'aimant à garder toujours la même orientation opposée au champ. Si l'on s'interdit de toucher l'aimant, une idée suivie par de nombreuses personnes a été d'utiliser l'effet gyroscopique : celui qui fait qu'une toupie rapide garde une direction fixe.

► Question 23.3.

Simplifications. On accroche donc à l'aimant un petit manche qui permet de le saisir entre le pouce et l'index, pour pouvoir le faire tourner vite. L'axe du manche est un axe de symétrie, de vecteur directeur \hat{n} (figure 84). On propose deux simplifications :

- Le moment magnétique $\vec{\mu}$ est parallèle à \hat{n} .
- On fait l'approximation dite « de la toupie très rapide » : on suppose qu'elle reste parfaitement verticale ($\hat{n} = \hat{e}_z$).

Mise en équations. L'énergie potentielle de la toupie est la somme d'un terme magnétique et d'un terme de pesanteur :

$$\mathcal{E}_P = mgz - \vec{\mu} \cdot \vec{B}, \quad (270)$$

qui s'écrit ici :

$$\mathcal{E}_P = mgz - \mu B_z. \quad (271)$$

Chacun des deux termes de cette énergie potentielle dépend de la position ; en effet, $B_z = B_z(\vec{r})$. L'équation (271) a un laplacien identiquement nul :

$$\Delta \mathcal{E}_P = mg \Delta(z) - \mu \Delta(B_z) = 0 + 0.$$

Analyse qualitative. Malheureusement, il existe un théorème dû à Earnshaw [3] qui stipule qu'une fonction f dont le laplacien est nul ($\Delta f = 0$) sur un domaine ne peut pas avoir de minimum (sauf au bord du domaine). La démonstration est courte : si jamais f avait un minimum qui n'est pas sur le bord du domaine, ses dérivées secondes dans toutes les directions seraient strictement positives, donc son laplacien aussi :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} > 0. \quad (272)$$

On contredirait donc la condition $\Delta f = 0$. Autrement dit, là où f passe par un extremum, il s'agit toujours d'un point col.

Si l'on réussit à fabriquer un minimum stable suivant l'axe z , cela veut dire que l'énergie potentielle \mathcal{E}_P de la toupie (définie par l'équation (271)) a un minimum le long de z , soit $\partial^2 \mathcal{E}_P / \partial z^2 > 0$. Puisque \mathcal{E}_P a un laplacien nul, elle doit avoir une dérivée seconde négative selon x ou y . Par conséquent, la toupie est instable radialement : elle va s'échapper sur le côté, soit à droite soit à gauche. À l'inverse, si on réussit à la stabiliser dans la direction droite-gauche, alors on n'a pas réussi à la stabiliser dans la direction haut-bas. Il ne s'agit donc pas d'une lévitation stable : on n'a rien gagné par rapport à l'aimant.

Plus généralement, soit un objet dont l'énergie potentielle est construite à partir de gravité, d'électrostatique, de magnétostatique, ou toute autre énergie dont le laplacien est nul : ce que prédit le théorème d'Earnshaw, c'est qu'il est impossible de le stabiliser de façon statique.

► Question 23.4.

Analyse qualitative. Devinette : alors, puisque la toupie lévitante existe bel et bien, pourquoi est-elle stable ? Solution : l'explication est obligatoirement dynamique !

Autrement dit, plutôt que de chercher un minimum d'énergie, il faut tenir compte des équations complètes du mouvement.

On va donc se placer dans le cas d'une toupie « moyennement rapide ». Elle doit tourner assez rapidement pour éviter le problème de l'aimant simple (voir question 23.2) ; elle ne doit pas tourner trop rapidement, afin d'éviter le problème de la toupie verticale (voir question 23.3). On précisera cette double limite après avoir évalué les valeurs numériques.

Simplifications.

- On suppose que la toupie est toujours assez rapide pour que sa rotation propre $\vec{\omega}$, et son moment cinétique $\vec{\sigma}$, restent toujours à peu près parallèles à la direction \hat{n} de l'axe ; c'est-à-dire que les autres composantes de $\vec{\omega}$ sont négligeables devant $\vec{\omega} \cdot \hat{n}$. Alors, en notant I le moment d'inertie de la toupie par rapport à son axe, on a approximativement :

$$\vec{\sigma} \approx I \vec{\omega}. \quad (273)$$

Cette approximation est moins forte qu'avant, puisqu'on ne suppose plus que \hat{n} est fixe. Elle suffit cependant à conserver l'essentiel de l'explication ; et à simplifier considérablement les calculs (sinon, ils sont affreux : voir l'exercice 21).

- Il y a des frottements, dûs à l'air : faut-il en tenir compte ? Non, ce n'est pas eux qui expliquent que la toupie tient. En effet, la toupie reste en l'air une minute ; la référence [2] annonce un record de quatre minutes. Puisque sa vitesse de rotation est grossièrement de l'ordre de vingt tours par seconde, elle effectue un bon millier de tours avant que les frottements n'aient un effet.

Il faudrait en tenir compte seulement si l'on cherchait à comprendre la durée de stabilité de la toupie. En effet, c'est à cause d'eux que la rotation se ralentit ; quand elle est devenue trop faible, la toupie devient instable, se retourne et tombe.

Mise en équations. On écrit alors la somme des moments des forces extérieures pris au barycentre de la toupie. Celui du poids est nul ; on néglige celui des frottements devant le terme dominant dû au champ magnétique (équation (269)) :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{magn}} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}. \quad (274)$$

Or on a fait l'hypothèse que $\vec{\sigma}$ reste parallèle à l'axe de la toupie, donc à $\vec{\mu}$ (équation (273)). Cela permet de réécrire l'équation (274) sous la forme :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{\sigma}, \quad (275)$$

où l'on a introduit la notation $\vec{\Omega}$:

$$\vec{\Omega} = -\frac{\mu}{\sigma} \vec{B} = -\frac{\mu}{I\omega} \vec{B}. \quad (276)$$

Cet $\vec{\Omega}$ est un vecteur rotation, comme on le voit sur l'équation (275) : $\vec{\sigma}$ précesse autour de \vec{B} , avec la pulsation Ω . Cette précession autour de la direction \vec{B} implique que $\sigma_{\parallel} = \vec{\sigma} \cdot \vec{B}/B$ se conserve, donc $\mu_{\parallel} = \vec{\mu} \cdot \vec{B}/B$ aussi.

Vérifications.

- Homogénéité de l'équation (276) : le numérateur μB est une énergie ; le dénominateur $I\omega$ est une énergie divisée par une pulsation (puisque $I\omega^2$ est une énergie) : le membre de droite est donc bien une pulsation.
- Signe : je n'ai pas de moyen simple de le vérifier (sauf en allant consulter les références [1] et [2], qui donnent bien le même), mais il n'a pas d'importance dans la suite.
- Comportement : il semble correct, puisque le numérateur contient le terme moteur d'origine magnétique, μB ; tandis que le dénominateur contient les termes stabilisants $I\omega$ d'origine inertielle, comme pour un gyroscope.

Valeurs numériques. Pour estimer les valeurs numériques, on peut dire que la toupie est un disque de rayon $R = 1$ cm. En ce cas, son moment d'inertie est celui d'un cylindre :

$$I = \frac{mR^2}{2} = \frac{\rho v R^2}{2}.$$

En utilisant l'équation (263), la pulsation de précession (équation (276)) est donc de l'ordre de :

$$\Omega = \frac{\mu B}{I\omega} = \frac{2MvB}{\rho v R^2 \omega} = \frac{2MB}{\rho R^2 \omega}.$$

Numériquement, avec $\omega = 120 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, on obtient :

$$\Omega = \frac{2 \times 2 \cdot 10^5 \times 10^{-2}}{7800 \times 10^{-4} \times 120} \approx 5 \cdot 10^1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1},$$

donc la période de précession $2\pi/\Omega$ est de l'ordre de 10^{-1} s. En pratique, Ω n'est donc pas très inférieur à ω .

Commentaires. La pulsation de précession Ω est inversement proportionnelle à ω (équation (276)). Par conséquent :

- Si la toupie tourne très vite sur elle-même, son axe varie très lentement, et elle reste donc presque toujours verticale.
- En revanche, si la toupie est moyennement rapide, elle s'ajustera rapidement pour suivre toute variation locale de \vec{B} . On se place donc dans ce cas-là.

Mise en équations (suite). Comme on l'a vu, $\vec{\mu}$ n'est pas exactement vertical. Le produit scalaire $\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ est désormais différent de μB_z , car il vaut :

$$\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \mu_{\parallel} B, \quad (277)$$

où μ_{\parallel} reste constant au cours de la précession :

$$\mu_{\parallel} = \text{constante}. \quad (278)$$

Si la position \vec{r} de la toupie varie un peu, elle voit un champ $\vec{B}(\vec{r})$ qui change un peu. Supposons que Ω est assez rapide pour que la toupie s'adapte rapidement et précesse toujours autour du champ local $\vec{B}(\vec{r})$. Alors, lorsqu'on moyenne $\vec{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{r})$ sur une période de précession, on peut supposer que \vec{B} est à peu près constant, donc :

$$\langle \mu_{\parallel} B(\vec{r}) \rangle \approx \langle \mu_{\parallel} \rangle B(\vec{r}). \quad (279)$$

En regroupant les équations (277-279), on obtient :

$$\langle \vec{\mu} \cdot \vec{B} \rangle \approx \mu_{\parallel} B(\vec{r}). \quad (280)$$

Grâce à l'équation (280), on peut moyenner l'équation (270) sur une période de précession. On obtient alors l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_p^{\text{eff}}$ de la toupie, écrite comme une moyenne d'une quantité dynamique :

$$\mathcal{E}_p^{\text{eff}} = \langle \mathcal{E}_p \rangle = mgz - \mu_{\parallel} B(\vec{r}). \quad (281)$$

À première vue, l'équation (281) n'est guère différente de l'équation (271). Et les valeurs de B_z et de B sont très proches.

Pourtant, il y a une différence essentielle, qualitative. En effet, B_z a un laplacien toujours strictement nul, quoi qu'on fasse. Au contraire, B n'a pas de condition particulière : on peut imaginer que, par endroits, il ait un laplacien légèrement positif. La lévitation n'est donc plus interdite ! Voyons si elle est autorisée ?

► Question 23.5.

Analyse qualitative. Quelles conditions faut-il réunir pour arriver à léviter ? Il faut arriver à créer un minimum de l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_P^{\text{eff}}$ (équation (281)). Notons \vec{r}_0 la position de cet endroit, il doit satisfaire les conditions suivantes :

- C'est un extremum, donc sa dérivée verticale, selon z , doit être nulle :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_P^{\text{eff}}}{\partial z}(\vec{r}_0) = 0. \quad (282)$$

Cela impose que mg et la répulsion magnétique se compensent exactement.

- Ses dérivées latérales, selon x et y , doivent aussi être nulles :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_P^{\text{eff}}}{\partial x}(\vec{r}_0) = \frac{\partial \mathcal{E}_P^{\text{eff}}}{\partial y}(\vec{r}_0) = 0. \quad (283)$$

Il est donc nécessaire de bien respecter la symétrie droite-gauche : si le socle n'est pas assez horizontal, la toupie s'échappe par les côtés.

- Cet extremum doit être situé dans une région où le laplacien de l'énergie est positif (équation (272)) :

$$\Delta \mathcal{E}_P^{\text{eff}}(\vec{r}_0) > 0. \quad (284)$$

Cela impose de positionner cette petite région très précisément.

- La condition (284) est nécessaire, mais elle ne suffit pas. Il faut aller encore plus loin, pour avoir la stabilité sur chacun des axes :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_P^{\text{eff}}}{\partial x^2}(\vec{r}_0) > 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}_P^{\text{eff}}}{\partial y^2}(\vec{r}_0) > 0, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}_P^{\text{eff}}}{\partial z^2}(\vec{r}_0) > 0. \quad (285)$$

Cela demande d'être vraiment astucieux.

Réalisation pratique. On a donc un mince espoir de fabriquer un minimum de $\mathcal{E}_P^{\text{eff}}$, dans lequel la toupie oscillera de façon stable.

Il est nécessaire d'ajuster à 1 % près [2] la masse m de la toupie, sinon elle s'échappe par en haut (m trop faible) ou par en bas (m trop grand) [1]. À chaque fois que la température de la pièce varie, le socle et l'aimant de la toupie se dilatent un peu, donc leur aimantation M par unité de volume se modifie légèrement (0,2 % par kelvin) [2] : en pratique, il faut réajuster la masse m régulièrement, plusieurs fois par heure.

On n'a pas beaucoup le choix pour la vitesse ω de rotation de la toupie :

- Si la toupie tourne trop lentement sur elle-même, sa direction s'éloigne trop de celle de B , et il n'y a plus assez de répulsion verticale : elle tombe vers le bas.

- Si elle tourne trop vite sur elle-même, quand elle change de position elle n'ajuste pas assez vite son orientation : donc elle sent le potentiel de l'équation (271), qui ne la retient pas latéralement.
- Entre ces deux extrêmes, le potentiel que sent la toupie présente un petit creux localement stable. La référence [2] l'a estimé : sa profondeur n'est que de 10^{-5} J.

Essayez de vous rendre compte de ce que représente un puits de potentiel aussi petit que 10^{-5} J. À titre de comparaison, considérez par exemple un puits de potentiel de pesanteur : si sa hauteur est h , son énergie est mgh . Pour une toupie de $m = 20$ g, cela correspond à une différence de hauteur de :

$$h = \frac{10^{-5} \text{ J}}{20 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \times 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ m.}$$

Lancer la toupie de façon à la positionner dans son minimum de potentiel est aussi difficile que si l'on essayait de la faire tenir dans un petit creux de $50 \mu\text{m}$ de profondeur ! Quand on la lance, il faut donc éviter de lui imprimer des mouvements de translation. Pour cela, ce minimum doit être accessible par une manipulation facile. Le SuperlevitronTM présente quelques améliorations concernant les points ci-dessus : une gamme de stabilité plus large, des dimensions plus visibles, une durée de lévitation plus longue. Malheureusement, la fréquence de rotation qu'il faut atteindre est devenue difficile à obtenir en lançant la toupie entre ses doigts.

Commentaires. La toupie qui lévite est actuellement la seule lévitation réalisable dans un salon. Comparons-la à d'autres situations :

- La lévitation de particules neutres qui ont un moment magnétique, par exemple des neutrons ou des atomes neutres dans un piège magnétique. Le principe physique est quasiment le même [1], et il avait été proposé par Vladimirkii en 1961, bien avant Harrigan. On peut également faire léviter des objets neutres, comme de petites billes, grâce à un laser qu'on focalise (« pincette optique »). De tels dispositifs sont électromagnétiques, non magnétostatiques [4]. Ce ne sont pas des expériences de coin de table accessibles au grand public.
- Les dispositifs où l'objet est en contact avec un rail (par exemple un train) ou une plaque qui supprime l'un de ses degrés de libertés. Comme l'objet ne flotte pas librement, on parle alors de « sustentation » et non de lévitation.
- Les supraconducteurs : au-dessus d'un aimant, ils lévitent de façon stable (contrairement aux ferromagnétiques, voir « **Ouverture** »). Depuis la découverte de matériaux supraconducteurs à haute température critique, cette lévitation se pratique avec de l'azote liquide, donc peut se faire en laboratoire sur un coin de table. Si l'on dispose un jour de matériaux supraconducteurs à température ambiante, cela deviendra même réalisable chez soi.
- Tous les matériaux, même ceux que l'on croit habituellement « non magnétiques », ont tous un très léger diamagnétisme. On peut donc les faire léviter de

façon stable (voir « **Ouverture** »), à condition de disposer d'un champ magnétique suffisamment fort. L'intérêt est de pouvoir réaliser en laboratoire, pour un coût raisonnable, des expériences de micro-gravité auparavant réalisées dans l'espace à des coûts élevés. Ainsi, avec 16 T, et un gradient sur environ 10 cm, l'équipe de Geim a réussi à obtenir une zone de stabilité de quelques cm^3 . Cela leur a permis de faire léviter des objets très usuels : des fleurs, des gouttes d'eau, et même des animaux vivants, comme une grenouille devenue célèbre [5] ou une sauterelle. Il s'agit bien d'objets quotidiens, mais le champ magnétique requis n'est pas accessible au grand public.

Notes.

- Selon que la toupie est lancée par un gaucher ou un droitier, elle tourne sur elle-même dans un sens différent. Cela change aussi son sens de précession. En revanche cela ne change rien à la stabilité de la toupie.
- Le socle peut avoir différentes formes [2, 5] : il peut être un rond ou un carré ; il peut être plein ou bien en anneau (c'est-à-dire avec un trou au centre). On a pris ici le cas le plus simple pour les calculs : un disque plein et mince.

Ouvertures.

- Calculez le champ \vec{B} au voisinage de l'axe ; pour cela, utilisez le fait que son laplacien est nul, et procédez à un développement limité. Déduisez-en l'expression de son module B en tout point proche de l'axe. Déduisez-en la taille de la zone de stabilité, la profondeur du puits de potentiel correspondant, la fréquence d'oscillation du centre de gravité de la toupie dans ce puits.

NB : cette fréquence doit être petite devant la fréquence de précession, pour que le raisonnement ci-dessus s'applique.

- Que se passe-t-il si l'on essaie de faire léviter un objet dont l'aimantation est, non pas constante (comme dans un aimant permanent), mais proportionnelle au champ extérieur ? C'est le cas pour un supraconducteur, ou pour un corps diamagnétique. Montrez que l'énergie potentielle est fonction de B et non de \vec{B} , donc que son laplacien n'est pas obligatoirement nul. Montrez que la lévitation requiert des conditions moins strictes que dans le cas de l'aimant permanent. Pour plus de détails voir la référence [5].
- Montrez que B^2 a un laplacien toujours positif ou nul, mais jamais négatif. Déduisez-en que B^2 ne peut pas avoir de maximum en volume, loin des parois. Montrez qu'il est impossible de faire léviter des corps paramagnétiques. Pour plus de détails voir la référence [5].

Sources et références

On trouve un grand nombre d'articles scientifiques ou de vulgarisation sur la lévitation magnétique. Beaucoup d'entre eux expliquaient que la lévitation d'aimants permanents serait strictement impossible. Depuis la mode de la toupie lévitante, on trouve l'erreur opposée, c'est-à-dire celle qui explique naïvement sa lévitation de

façon statique. Au milieu de tous ces articles, la référence reste l'article [1], mais il est difficile à lire. Pour les valeurs numériques et les expériences, on pourra se reporter au [2]. L'article [5] fait le lien entre la lévitation des ferromagnétiques et des diamagnétiques. À titre historique, on cite aussi la référence [3].

- [1] M.V. BERRY. The LevitronTM: An Adiabatic Trap for Spins. *Proceedings of the Royal Society London A*, volume 452, 1996, pages 1207-1220.
- [2] M. SIMON, L. HEFLINGER, et S. RIDGWAY. Spin Stabilized Magnetic Levitation. *American Journal of Physics*, volume 65, 1997, pages 286-292.
- [3] S. EARNSHAW. On the Nature of the Molecular Forces which Regulate the Constitution of the Luminiferous Ether. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, volume 7, 1842, pages 97-112. Voir aussi [6].
- [4] R. KAISER. *Petits problèmes de physique – deuxième partie*. Springer, Heidelberg, 1999, Exercice 6.
- [5] M.V. BERRY et A.K. GEIM. Of Flying Frogs and Levitrons. *European Journal of Physics*, volume 18, 1997, pages 307-313.
- [6] W.T. SCOTT. Who was Earnshaw? *American Journal of Physics*, volume 27, 1959, pages 418-419.

Corrigé 24 Ne ratez pas la mousse (Énoncé à la page 40)

Commentaire. Il s'agit d'un exemple concret de détente. Il permet d'aborder la thermodynamique en insistant sur la physique, sans se noyer dans les formules. Pour choisir les notations pertinentes, essayez d'abord d'analyser ce qui se passe.

► Question 24.1.

Analyse qualitative. La mousse est un mélange de liquide (typiquement de l'eau contenant un certain nombre de molécules dissoutes) et de gaz. Elle est sous une pression supérieure à la pression atmosphérique. Quand on ouvre, elle doit abaisser sa pression jusqu'à être en équilibre mécanique avec la pression atmosphérique. Lors de cette chute de pression, le liquide garde à peu près le même volume, tandis que le gaz forme des bulles qui grossissent fortement.

Pouvez-vous trouver pourquoi il y a deux étapes ? Pour répondre, il faut de l'intuition physique, ou de l'habitude de ce genre de problèmes. On va donner la réponse, puis examiner ses conséquences, et enfin seulement proposer des justifications. La réponse est la suivante.

La première étape est une *détente très rapide*, sans échange de chaleur, où la mousse se refroidit. Détaillons-la un peu. La mousse atteint l'*équilibre mécanique*, c'est-à-dire que les pressions sont les mêmes dans le liquide et dans le gaz (toutes

deux égales à la pression atmosphérique). Le liquide, peu perturbé, reste à température proche de l'ambiante. En revanche, la température des bulles de gaz s'abaisse, ce qu'on peut voir de plusieurs manières :

- soit parce qu'on sait qu'un gaz qui se détend se refroidit ;
- soit parce qu'on remarque que le gaz doit travailler contre la pression extérieure, donc perd de l'énergie ;
- soit parce qu'on connaît par cœur les formules de ce genre de détente, dite « adiabatique ».

La deuxième étape, plus *lente*, est un retour à l'*équilibre thermodynamique* : égalité des pressions, mais aussi des températures, du gaz et du liquide. Durant cette deuxième étape, le gaz voit donc sa température s'élever jusqu'à revenir à l'ambiante, alors que sa pression est constante : cela implique que son volume augmente encore.

Comment justifier la distinction entre ces deux étapes ? On sait traiter une détente adiabatique (première étape) et une détente isobare (deuxième étape) séparément, et on a des formules analytiques pour cela. En revanche, ce qu'on observe réellement en pratique est bien plus difficile à traiter : la détente commence de façon adiabatique et devient progressivement isobare. Pour aller plus loin, il faudrait des mesures précises des volumes et températures, difficiles à effectuer chez soi. À défaut, on peut choisir de faire confiance à l'article [1], dont les mesures sont compatibles avec les prédictions ci-dessous.

Notations. Pas trop de difficulté pour les notations. On peut introduire par exemple :

- P la pression du gaz, T sa température, V son volume total, m sa masse, c_P et c_V ses capacités calorifiques (par unité de masse), respectivement à pression et volume constants, $\gamma = c_P/c_V$, U son énergie interne, S son entropie.
- P_L , T_L , V_L , m_L , U_L , S_L les données correspondantes pour le liquide. On notera c_L la capacité calorifique du liquide, qui est à peu près la même qu'on soit à volume ou à pression constant.
- P_{atm} et T_{amb} la pression et la température de l'atmosphère, P_0 et T_0 la pression et la température initiales dans le récipient, qui vérifient :

$$T_0 = T_{\text{amb}}, \quad P_0 > P_{\text{atm}}.$$

Simplifications. On va pouvoir faire quelques simplifications, outre celles que l'énoncé a déjà introduites :

- L'approximation des gaz parfaits, pour le gaz (voir page 5) : $PV/T = \text{constante}$.

- L'hypothèse que le liquide est beaucoup moins compressible que le gaz, donc ici on néglige sa compressibilité : $V_L = \text{constante}$; en revanche, sa masse est bien plus importante que celle du gaz : $m_L \gg m$.
- T est la température du gaz, supposée approximativement la même dans toutes les bulles ; de même, T_L est supposée être la température de tous les points du liquide.
- Si la viscosité du gaz est assez faible, on néglige la dissipation d'énergie à l'intérieur du gaz devant la dissipation dans le liquide, ou à l'extérieur de la mousse.

► Question 24.2.

Première étape : détente adiabatique. Il s'agit d'un bon exemple pédagogique pour expliquer qu'un gaz change de température sans échanger de chaleur (voir page 6).

Mise en équations. Puisqu'on néglige la dissipation d'énergie à l'intérieur du gaz, il décrit une courbe adiabatique, ou isenthalpique. Tout ce qu'il fait, c'est travailler contre la pression des parois, qui ici sont liquides.

Pour la mise en équations, mieux vaut prendre comme système le gaz tout seul, et écrire qu'une courbe adiabatique vérifie :

$$PV^\gamma = \text{constante}, \quad \frac{V_1}{V_0} = \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{1/\gamma}. \quad (286)$$

Valeurs numériques. Il faut connaître la valeur de γ ; pour fixer les idées, on prendra ici $\gamma = 1,4$, qui donne des ordres de grandeur corrects (voir « Notes »). Quant à la pression initiale P_0 , elle vaut quelques bars ; avec un manomètre, l'article [1] a mesuré 4 bars dans une bombe de mousse à raser. Une bière est typiquement sous 2 bars.

Prenons cette valeur de 4 bars ; elle donne, puisque $P_1 \approx 1$ bar :

$$\frac{V_1}{V_0} = 4^{5/7} = 2,7.$$

Le gaz triple presque de volume : c'est beaucoup, mais c'est nettement moins que s'il était passé de 4 bars à 1 bar sans changer de température.

Au fait : quelle température la mousse a-t-elle atteinte ? L'énoncé ne le demande pas, mais on en aura besoin pour la question suivante. Alors, comment la calculer ? L'équation (286) implique, puisque $PV/T = \text{constante}$:

$$\frac{T_0}{T_1} = \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \quad (287)$$

Numériquement, cela donne :

$$\frac{T_1}{T_{\text{amb}}} = 4^{-2/7} = 0,67.$$

Brrr, c'est froid : le gaz s'est refroidi de 100 K environ ! On est très loin de l'isotherme (voir la figure 85). En partant de $T_0 = T_{\text{amb}} = 293 \text{ K}$, on atteint $T_1 = 197 \text{ K}$. Est-ce que la mousse gèle ? Voyons cela.

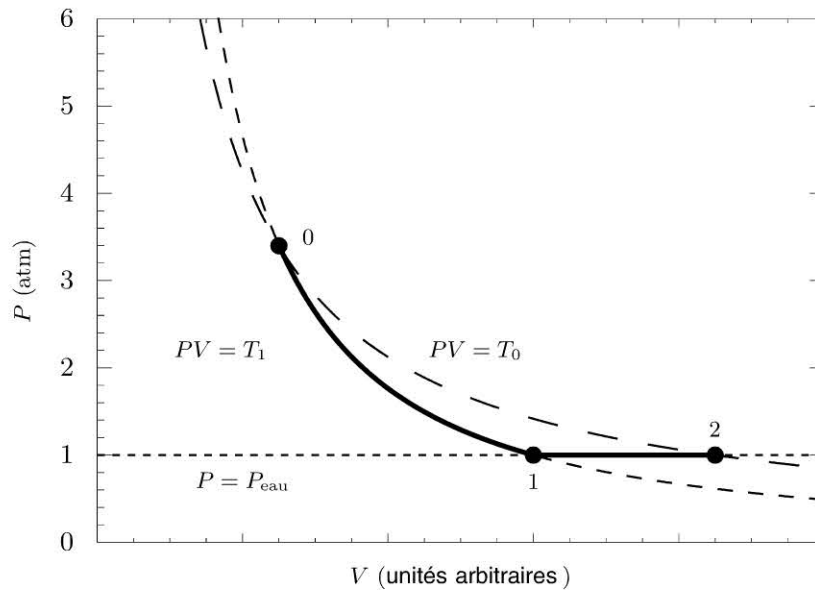


Figure 85 Diagramme pression-volume.

La première étape, sans échange de chaleur (adiabatique), va du point 0 au point 1.

La deuxième étape, à pression constante (isobare), va du point 1 au point 2.

Pour faciliter la comparaison, on a aussi représenté les isothermes

$PV = T_0$ (tirets longs) et $PV = T_1$ (pointillés).

► Question 24.3.

Deuxième étape : détente isobare. Le gaz et le liquide sont maintenant à la même pression, $P = P_L = P_{\text{atm}}$, mais à des températures très différentes, respectivement T_1 et T_0 . Ils vont se thermaliser, en échangeant de la chaleur. Le liquide gèle-t-il ? On constate bien que non, mais pourquoi ? C'est parce que la capacité calorifique du gaz est bien plus petite que celle du liquide, donc le gaz n'arrive pas à faire beaucoup diminuer la température du liquide.

On cherche de combien augmente le volume : comme la pression est constante, et que $PV/T = \text{constante}$, il suffit de calculer la variation de température.

Mise en équations. Puisque la pression reste constante, le bilan de l'énergie du système total (le gaz et le liquide ensemble) utilise c_P :

$$mc_P(T_2 - T_1) + m_L c_L(T_2 - T_0) = 0. \quad (288)$$

On en déduit T_2 :

$$T_2 = \frac{m c_P T_1 + m_L c_L T_0}{m c_P + m_L c_L}.$$

Autrement dit, T_2 est la moyenne de T_0 et de T_1 , pondérées par les capacités calorifiques respectives. On peut voir que seul joue le rapport des capacités calorifiques, en réécrivant T_2 sous la forme :

$$T_2 = T_0 - \frac{T_0 - T_1}{1 + (m_L c_L)/(m c_P)}.$$

Cela montre que, si le liquide et le gaz ont des capacités calorifiques très différentes, $m_L c_L \gg m c_P$, alors T_2 est presque égal à T_0 .

Valeurs numériques. Numériquement, peut-on évaluer $m_L c_L / m c_P$? Les capacités calorifiques par unité de masse sont du même ordre de grandeur : $c_L / c_P \approx 4$, voir page 287. En revanche, le terme essentiel est m_L / m , qui est grand devant 1.

Comment l'évaluer ? Un moyen est de regarder la masse d'un litre de mousse. Ce n'est pas facile à estimer de tête, mais cela se mesure très bien expérimentalement avec une balance. L'article [1] mesure qu'un litre de mousse ($V + V_L \approx V = 1 \ell$) a une masse $m_L + m \approx m_L = 80 \text{ g}$. La mousse contient donc $m_L = 80 \text{ g}$ d'eau, qui occupe $V_L = 80 \text{ cm}^3$, et $V = 1 \ell$ de gaz (ou un peu moins : $1 \ell - 80 \text{ cm}^3 = 920 \text{ cm}^3$), soit environ $m = 1 \text{ g}$ de gaz. Cela donne :

$$T_2 \approx T_0 - \frac{1}{320}(T_0 - T_1) = T_0 - 0,3 \text{ K}, \quad (289)$$

soit 0,3 K en-dessous de l'ambiante : pas de quoi faire geler le liquide !

On en déduit la variation de volume :

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \approx \frac{T_0}{T_1} = 1,5. \quad (290)$$

Le gaz, donc la mousse, continue à augmenter de volume durant la deuxième étape. C'est loin d'être négligeable : 50 % d'augmentation.

Vérifications. Toutes les équations ci-dessus sont-elles homogènes ? Vérifiez-le, c'est assez facile.

Ensuite, on vérifie qu'au final, le gaz s'est bien détendu autant que si la détente avait été isotherme, autrement dit s'il était directement passé de P_0 à P_2 en restant

toujours à $T = T_0$ (figure 85). Pour vérifier cela, on regroupe les équations (286), (287) et (290)) :

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_0} &= \frac{V_2}{V_1} \frac{V_1}{V_0} = \frac{T_2}{T_1} \frac{V_1}{V_0} \approx \frac{T_0}{T_1} \frac{V_1}{V_0} \\ &= \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{1/\gamma} = \frac{P_0}{P_1} = 4. \end{aligned} \quad (291)$$

► Question 24.4.

Troisième étape : thermalisation. Comme le gaz et du liquide s'équilibrent à une température T_2 légèrement inférieure à T_{amb} (équation (289)), en toute rigueur, il y a en fait ensuite une troisième étape, pendant laquelle la mousse s'équilibre avec l'atmosphère et revient à T_{amb} .

Notez que la deuxième étape impliquait une thermalisation des bulles avec leur paroi (taille inférieure au millimètre, et possibilité de convection au sein de la bulle). Au contraire, maintenant il s'agit de diffusion à travers un très grand volume de mousse, qui est un bon isolant thermique : cette troisième étape est donc très lente.

Cette troisième étape n'a en fait aucun effet détectable. En effet, une augmentation de 0,3 K représente une variation de température d'un millième, et une variation de volume d'autant ! Il est donc impossible de la représenter à l'échelle de la figure 85, où T_2 et T_0 sont indiscernables à l'œil nu.

Notes. On peut faire quelques commentaires autour de ce problème :

- On a supposé ici que $P \approx P_L$. C'est une très bonne approximation, même si ce n'est pas strictement exact (voir page 282).
- Comme on suppose ici qu'il y a deux étapes bien tranchées, au point 1, j'ai dessiné un angle bien marqué, entre la première et la deuxième courbe. En réalité, la transition entre ces deux étapes est progressive, et la courbe réelle est plus arrondie. Exercez-vous à tracer le graphe avec les variables (T, V) ou (P, T) , au lieu de (P, V) comme ici. Cela ne change rien, en pratique.
- Puisqu'en réalité la détente est intermédiaire entre adiabatique et isotherme, pourquoi s'est-on compliqué la vie : aurait-on pu décrire le tout par l'approximation d'une détente isotherme ? Certainement non ; contrairement à d'autres exemples (voir page 256), ici cette approximation abusive (voir page 5) nous aurait fait perdre une partie essentielle de la physique : le refroidissement transitoire du gaz, la distinction entre deux étapes successives.
- La valeur de γ dépend de la nature du gaz. Elle vaut $(n + 2)/n$, où n est le nombre de degrés de liberté effectivement excités des molécules du gaz. Or, à la température ambiante de 300 K, les degrés de liberté vibrationnels ont une énergie trop élevée pour être excités de manière significative. Pour un gaz diatomique,

comme N_2 ou O_2 , seuls comptent donc les trois degrés de translation et les deux de rotation : alors $\gamma = 7/5 = 1,4$. Il en est de même pour un mélange de gaz diatomiques, comme l'air. Ce sera donc la valeur qu'il faut prendre pour les bières sous pression de gaz dit « mixte », essentiellement de l'azote (voir page 281).

Pour la plupart des bières, et pour les mousseux, c'est du CO_2 ; les trois atomes qui composent sa molécule restent alignés et n'ont pas plus de degrés de liberté excités qu'une molécule diatomique : son γ est proche de 1,4. Pour une molécule non linéaire, on aurait trois degrés de rotation, et donc un γ plus proche de $8/6 = 1,33$.

- Pour un autre exemple de détente spectaculaire, voir page 149.

Ouvertures. Si l'on veut comprendre comment le faux-col de la bière se forme, puis finit par disparaître, il faut tenir compte de tous les effets physico-chimiques que l'énoncé a suggéré de négliger (voir détails dans le livre [2]) :

- La formation de la mousse : il faut que le gaz dissous nucléé des bulles (problème pas simple), puis qu'elles remontent à la surface (problème d'hydrodynamique).
- Le drainage du liquide, qui s'écoule depuis le haut vers le bas du faux-col : à l'équilibre, la densité de liquide est plus élevée en bas qu'en haut du faux-col, ce qui se voit très bien à l'oeil (exercice difficile mais joli : trouver le profil d'équilibre, c'est-à-dire la densité de la mousse en fonction de la hauteur).
- Le « vieillissement », ou « mûrissement » de la mousse : les parois des bulles ne sont pas strictement étanches, le gaz peut passer d'une bulle à l'autre, et finalement des bulles se vident et disparaissent, voir page 281.
- Les parois finissent par se casser, et donc la mousse disparaît peu à peu.

Sources et références

On trouvera des mesures expérimentales, et une discussion de certaines hypothèses, dans l'article [1].

- [1] C. de IZARRA et O. VALLÉE. A Visual Thermodynamical Effect. *European Journal of Physics*, volume 20, 1999, pages 267-270.
- [2] D. WEAIRE et S. HUTZLER. *Physics of Foams*. Clarendon Press, Oxford, 1999.

Corrigé 25 Comment évolue le rond quand le robinet coule plus fort (Énoncé à la page 41)

Première approche. La manipulation vous permet de voir que l'épaisseur de la couche d'eau est une variable essentielle. En effet, le ressaut est la transition entre une région où la couche d'eau est fine, à une région où la couche est épaisse.

L'autre observation importante est que votre doigt n'a de l'effet que si il est à l'intérieur du ressaut, pas à l'extérieur. Autrement dit l'amont affecte l'aval, mais l'inverse ne semble pas vrai. On verra qu'il faut nuancer cette affirmation ; mais en attendant suivez l'eau de l'amont (le robinet) vers l'aval.

Difficultés particulières. Le problème est de savoir quelles équations vous allez bien pouvoir écrire. Consacrez donc un temps suffisant à l'analyse, avant de lire la suite de ce corrigé. Rappelez-vous de rester simple, et de négliger tout ce qui est spécifique de la mécanique des fluides (il n'y a aucun besoin de notions comme la viscosité, les tourbillons, les couches limites). La principale difficulté qui reste sera le choix des systèmes pour lequel vous écrirez vos bilans, en particulier au niveau du ressaut.

► Question 25.1.

Notations. Au premier abord il y a une foule de variables dans ce problème (voir la figure 86). Commençons par introduire des notations en vrac, on verra ensuite comment les ordonner, et s'il y a d'autres notations à introduire :

- Coordonnées : la symétrie étant radiale, donc cylindrique, vous pouvez utiliser (r, θ, z) , en prenant l'origine O au centre de l'évier.
- Variables géométriques : rayon R du rond, rayon $a(z)$ du jet vertical ; hauteur de la couche d'eau à l'endroit du rond : h à l'intérieur du rond ($r < R$), H à l'extérieur du rond ($r > R$) ; le robinet est à la hauteur Z .
- Variables cinématiques : vous devez étudier la vitesse de l'eau en chaque point. En pratique, pour écrire les conditions de raccordement de façon légère (en évitant de lourdes notations du type $v(R^-)$ ou $v(R^+)$), il sera commode de distinguer : la vitesse au sein du jet, notée par exemple u ; la vitesse v de l'eau à l'in-

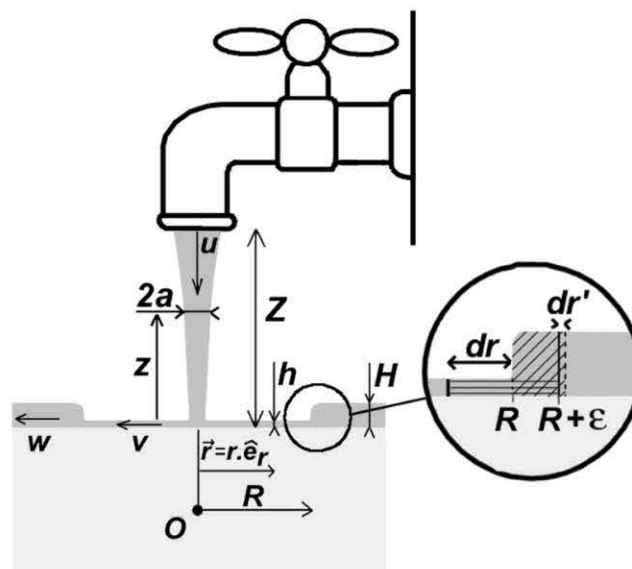


Figure 86 Notations utilisées.

Dans le cercle en insert : agrandissement du raccordement en $r = R$.

térieur du rond ; la vitesse w à l'extérieur du rond. Plus précisément, $u(z)$, $0 < z < Z$, est une vitesse parallèle à z ; au contraire, $v(r)$, $0 < r < R$, et $w(r)$, $R < r$, sont des vitesses radiales.

Comment ordonner ces notations ? On distinguera :

- Ce qu'on cherche : c'est R .
- Ce qu'on connaît, qui est donné par le problème : c'est le robinet, donc Z et $a(Z)$. Le débit d'eau est fixé une fois que vous avez ouvert votre robinet : appelons-le D . L'expérience prouve que D joue sur R : plus on ouvre le robinet, donc plus on augmente D , plus R augmente.

A priori, les inconnues devraient être : u , v , w , a , h , H . Elles sont probablement pertinentes, mais elles ne nous intéressent pas, et on les éliminera pour trouver R .

On suppose donc qu'il faudra écrire une équation pour chacune de ces sept inconnues, en comptant R . On va bientôt devoir nuancer cette affirmation.

Mesures expérimentales. Dans mon évier, le robinet est situé à $Z = 30$ cm de hauteur et son diamètre est de 12 mm, soit $a(Z) = 6$ mm. J'ouvre le robinet de façon à créer un joli ressaut rond de rayon $R = 5$ cm, et je peux alors mesurer le débit en regardant combien de temps il faut pour remplir un récipient. J'ai un verre mesureur d'un demi-litre. Il se remplit en 14 s, soit 1 ℓ en 28 s : $D = 35 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 35 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Je mesure alors $a(0) = 0,25$ cm, et avec moins de précision $H = 0,5$ cm ; j'estime très grossièrement $h \simeq 0,01$ cm. En jetant des miettes de pain dans l'eau, je constate que w est de l'ordre des $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$, tandis que $v \gg w$: v doit être supérieur à $10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

En ouvrant le robinet plus ou moins, j'obtiens pour R les valeurs : 1 cm ; 1,5 cm ; 3 cm ; 5 cm ; 7,5 cm, et je mesure les temps correspondants pour remplir mon verre d'un demi-litre : 140 s ; 65 s ; 30 s ; 14 s ; 6 s. En convertissant les débits en $\text{cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, on obtient le graphe de la figure 87, qui représente le rayon en fonction du débit.

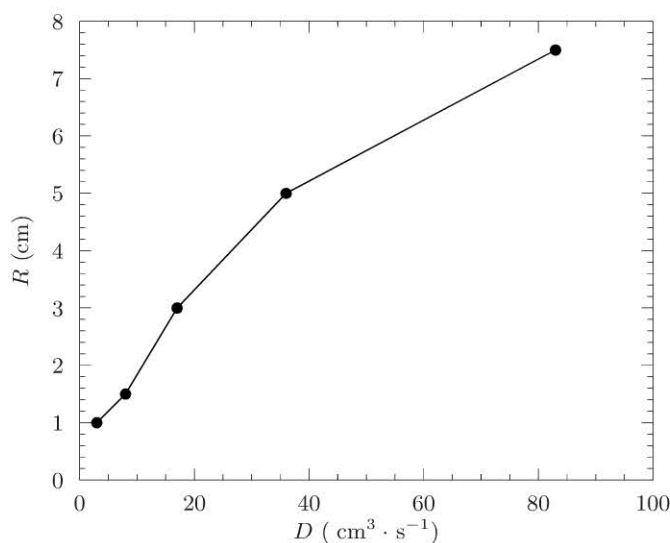


Figure 87 Quelques mesures expérimentales du rayon et du débit.

► Question 25.2.

Analyse qualitative. Quelles équations peut-on écrire ?

- Les équations cinématiques vont être très simples. On va écrire la conservation de la masse, donc du débit. Cela donnera une condition pour u , une pour v , une pour w , soit trois équations.
- On va pouvoir écrire trois équations mécaniques. La première concerne le jet vertical : il s'agit d'une chute libre. La seconde concerne le choc au moment de l'impact au milieu de l'évier, point O : la vitesse verticale devient une vitesse horizontale, radiale. La troisième concerne le ressaut, où la vitesse diminue fortement, et l'épaisseur de la couche d'eau augmente.

Si l'on suit un petit volume d'eau tout au long de son parcours, il dissipe visiblement de l'énergie mécanique. En effet, l'eau n'est pas une super-balle rebondissante qui remonterait aussi haut que son point de départ (voir « Notes »). À quel endroit se produit cette perte d'énergie mécanique, et dans quelle mesure faut-il en tenir compte ?

Sur la chute libre, d'une hauteur de 30 cm, il est raisonnable de négliger les frottements et d'écrire que l'accélération est g . La première perte notable se produit au niveau du choc, quand la vitesse verticale se transforme en vitesse horizontale ; cependant, si l'on ne va pas observer l'écoulement dans ses détails, on devra se contenter d'écrire que l'énergie cinétique se conserve à peu près, car on ne sait strictement rien écrire d'autre. Enfin, au niveau du ressaut, une grosse fraction de l'énergie mécanique se dissipe ; heureusement, comme on le verra, on pourra y écrire un bilan de quantité de mouvement sans se préoccuper de l'énergie. On devra vérifier toutes ces hypothèses *a posteriori*.

Cela fait donc au total six équations. Il en manque une ? Oui, et on ne pourra pas l'écrire. L'expérience montre que la hauteur H n'est pas uniquement déterminée par ce qui se passe en amont. En effet, H dépend des conditions d'écoulement en aval. C'est facile à prouver : bouchez l'évier, vous constaterez bien sûr que H augmente ! Si l'on voulait calculer H , il faudrait encore d'autres données, et un calcul qui déborde largement le cadre de cet exercice ; pour plus de détails, voir l'article [1]. En attendant, on considérera H comme une donnée, et les six équations permettront d'écrire R en fonction de D et de H .

► Question 25.3.

Mise en équations. On va donc procéder à l'écriture des trois équations de bilan de masse, puis des trois équations mécaniques :

- Comme le débit est le produit de la vitesse par la section :

$$D = \pi A^2 u(Z) = \pi a^2(0) u(0), \quad (292)$$

on écrit les trois équations pour z , $r \leq R$, et $r \geq R$:

$$D = \pi a^2(z) u(z) = 2\pi R h v(R) = 2\pi R H w(R). \quad (293)$$

D'où la condition de raccordement en $r = R$:

$$hv(R) = Hw(R). \quad (294)$$

- En sortant du robinet, l'eau est en chute libre. Cela va nous donner la vitesse de l'eau $u(0)$ au moment de son arrivée au fond de l'évier ; et donc aussi $a(0)$, grâce à l'équation (292). Cherche-t-on u en fonction du temps ou de la position z ? En fonction de la position z , car le temps ne nous intéresse pas. Comme, en outre, il s'agit d'un problème conservatif à un degré de liberté, il n'y a aucune hésitation, on utilise la conservation de l'énergie mécanique (page 7) :

$$\frac{1}{2} u(z)^2 + gz = \frac{1}{2} u(Z)^2 + gZ,$$

donc :

$$u(0)^2 = u(Z)^2 + 2gZ. \quad (295)$$

- Au moment de l'impact, la conservation de l'énergie mécanique donne :

$$\frac{1}{2} v(a(0))^2 = \frac{1}{2} u(0)^2,$$

à condition d'utiliser deux approximations simplificatrices. Tout d'abord, on a négligé la dissipation due à la viscosité de l'eau. Ensuite, puisque h est petit, on a négligé l'énergie potentielle par unité de volume gh , qui est de l'ordre de $1000 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2} \times 10^{-2} \text{ cm}$, soit $10 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, devant $u(0)^2$ et $v(a(0))^2$, environ dix fois plus grands. Cette approximation reste valable sur toute la zone $r < R$. L'énergie cinétique (par unité de volume) de l'eau reste donc constante : v^2 est constante, v aussi. On obtient donc :

$$v(r) = \text{constante} = u(0). \quad (296)$$

- Au niveau du ressaut, les choses sont moins simples. Que se passe-t-il, physiquement ? La vitesse chute, l'eau monte. Peut-on écrire un bilan de quantité de mouvement ; et si oui, sur quel système ? Il faut prendre une tranche de fluide. Le bilan sera simple si les forces extérieures à cette tranche sont uniquement les forces de pression (à peu près hydrostatiques) exercées par le reste de l'eau. Pour s'affranchir des détails à l'intérieur du ressaut lui-même, il est alors nécessaire que la tranche contienne le ressaut tout entier, c'est-à-dire la zone entre R et, disons, $R + \varepsilon$. Comme il faut cette condition à l'instant initial t comme à l'instant final $t + dt$, on prendra initialement au temps t la tranche comprise entre $R - dr$ et $R + \varepsilon$; à l'instant final $t + dt$, elle se retrouve entre R et $R + \varepsilon + dr'$ (zone hachurée sur l'agrandissement de la figure 86) :

$$\begin{aligned} dr &= v(R) dt, \\ dr' &= w(R) dt. \end{aligned} \quad (297)$$

On souhaite écrire le bilan de quantité de mouvement, c'est-à-dire le principe fondamental de la dynamique. On écrit donc que la somme des forces que subit cette tranche est responsable de la variation de sa quantité de mouvement :

$$\vec{F}_{\text{tot}} dt = d\vec{p}(t + dt) - d\vec{p}(t). \quad (298)$$

Mais attention ! si l'on prend toute une tranche circulaire, θ allant de 0 à 2π , on a une surprise : sa quantité de mouvement totale est nulle, par symétrie, de même que la résultante des forces extérieures. On a donc écrit $0 = 0$, et on n'a guère avancé.

On recommence donc en prenant seulement le morceau de cette tranche compris entre les angles θ et $\theta + d\theta$. De combien sa quantité de mouvement a-t-elle varié, entre t et $t + dt$? Elle a varié de :

$$\begin{aligned} d\vec{p}(t + dt) - d\vec{p}(t) &= \rho H(\varepsilon + dr') R d\theta \times w(R) \hat{e}_r \\ &\quad - \rho h(\varepsilon + dr) R d\theta \times v(R) \hat{e}_r. \end{aligned} \quad (299)$$

Cette équation se simplifie compte tenu de l'équation (294), puis de l'équation (297) :

$$\begin{aligned} d\vec{p}(t + dt) - d\vec{p}(t) &= \rho R d\theta [Hw(R) dr' - hv(R) dr] \\ &= \rho R d\theta [Hw^2(R) - hv^2(R)] dt. \end{aligned} \quad (300)$$

Pendant ce temps, quelle force résultante ce morceau de fluide a-t-il subi ? A l'extérieur du rond, en $r = R_+$, la pression vaut P_{atm} en $z \geq H$; dans l'eau, si elle est à peu près hydrostatique, elle vaut donc :

$$0 \leq z \leq H : \quad P(R_+, z) = P_{\text{atm}} + \rho g(H - z).$$

De même, à l'intérieur du rond, la pression vaut P_{atm} pour $z \geq h$, donc dans l'eau elle vaut :

$$0 \leq z \leq h : \quad P(R_-, z) = P_{\text{atm}} + \rho g(h - z).$$

Cette tranche subit donc au total la résultante :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{tot}} &= \left[r d\theta \hat{e}_r \left(\int_0^h P(r, z) dz + r d\theta \hat{e}_r \int_h^H P_{\text{atm}} dz \right) \right]_{r=R_-} \\ &\quad - \left[r d\theta \hat{e}_r \int_0^H P(r, z) dz \right]_{r=R_+} \\ &= \rho g R d\theta \frac{h^2 - H^2}{2} \hat{e}_r. \end{aligned} \quad (301)$$

Le bilan de quantité de mouvement (équation (298)) s'écrit en regroupant les équations (300) et (301) :

$$\rho g R d\theta \frac{h^2 - H^2}{2} \hat{e}_r dt = \rho R d\theta [H w^2(R) - h v^2(R)] dt.$$

On simplifie par $\rho R d\theta dt$, puis on projette sur \hat{e}_r pour se ramener à une équation scalaire :

$$g \frac{h^2 - H^2}{2} = H w^2(R) - h v^2(R). \quad (302)$$

Vérifications.

- On vérifie d'abord que l'équation (302) est homogène : en effet, les deux membres s'expriment en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$.
- Ensuite, les signes sont corrects : en effet, la résultante des forces de pression est dirigée selon $-\hat{e}_r$, ce qui tend à faire diminuer la quantité de mouvement radiale.
- On vérifiera le comportement de l'équation (302) après simplification, voir équation (303).

► Question 25.4.

Simplifications. Grâce aux approximations basées sur l'observation expérimentale ($h \ll H, v \gg w$) et à l'équation (294), qui sont heureusement compatibles, l'équation (302) se simplifie encore :

$$g \frac{H^2}{2} = h v^2(R). \quad (303)$$

On peut vérifier le comportement de cette équation : $H = v\sqrt{2h/g}$ augmente avec v et h , comme il se doit.

Résolution. En partant de D , on va alors pouvoir tirer successivement a , puis $v(R)$ et h , puis R . Ainsi, les équations (292) et (295) donnent :

$$\left(\frac{D}{\pi a^2(0)} \right)^2 = \left(\frac{D}{\pi a^2(Z)} \right)^2 + 2gZ,$$

soit :

$$\frac{1}{a(0)^4} = \frac{1}{a(Z)^4} + \frac{2\pi^2 g Z}{D^2}. \quad (304)$$

On vérifie que cette équation (304) décrit bien l'expérience :

- à gros débit elle donnerait $a(0) = a(Z)$, soit un jet cylindrique ;
- alors qu'à petit débit elle donnerait $a(0) \rightarrow 0$, soit un jet très fin en bas.

Connaissant $a(0)$, en utilisant les équations (292) et (296), on en tire $v(R)$:

$$v(R) = \frac{D}{\pi a(0)^2}. \quad (305)$$

De a et v on déduit h , en regroupant les équations (293) et (305) :

$$h = \frac{D}{2\pi R v(R)} = \frac{a(0)^2}{2R}. \quad (306)$$

Dans l'équation (303), on remplace v et h par leurs expressions (305) et (306) pour trouver une relation entre H et R :

$$g \frac{H^2}{2} = \frac{a(0)^2}{2R} \left(\frac{D}{\pi a(0)^2} \right)^2 = \frac{D^2}{\pi^2 a(0)^2 R},$$

d'où finalement R en fonction de H , ou *vice-versa* :

$$R = \frac{D^2}{\pi^2 a(0)^2 g H^2}, \quad (307)$$

$$H = \frac{D}{\pi a(0) \sqrt{g R}}. \quad (308)$$

En utilisant l'expression de a (équation (304)) on obtient l'expression complète de R , certes assez lourde :

$$R = \frac{D^2}{\pi^2 g H^2} \sqrt{\frac{1}{a(Z)^4} + \frac{2\pi^2 g Z}{D^2}}. \quad (309)$$

Vérifications. Vérifiez que cette équation est bien homogène. $2\pi^2 g Z / D^2$ est homogène à des m^{-4} , tout comme $a(Z)^{-4}$, donc la racine est en m^{-2} . Ensuite, $D^2 / (\pi^2 g H^2)$ est en m^3 , donc le membre de droite est en m ; ouf !

Vérifiez maintenant les signes et le comportement de l'expression de R . On peut choisir de vérifier l'équation (307), plus simple que l'équation (309). Ainsi :

- L'équation (307) montre que R diminue quand H augmente. Peut-on le vérifier expérimentalement ? Oui, c'est facile ; il suffit de boucher l'évier ! Rapidement, H augmente et l'on voit R diminuer à vue d'œil.

- L'équation (307) montre que R augmente avec D , comme on le voit expérimentalement. Notez que cette variation n'est pas tout à fait en D^2 , car D contribue aussi à augmenter a et H , et donc réduit un peu R , comme on le voit sur l'équation (309). C'est compatible avec les données de l'expérience (figure 87).
- La hauteur Z du robinet au-dessus de l'évier augmente la vitesse de chute au moment de l'impact (équation (295)), donc diminue $a(0)$ (équation (304)), et finalement elle augmente R (équation (307)). C'est assez compréhensible : si l'eau ne tombait pas, il ne se passerait rien, et il n'y aurait pas de ressaut.
- Quel est l'effet de g ? Il a deux effets antagonistes. D'une part, augmenter la vitesse d'impact en O , au moment de la conversion d'énergie potentielle en énergie mécanique ; d'autre part, empêcher la formation du bourrelet de hauteur H , au moment de la (médiocre) conversion d'énergie mécanique en énergie potentielle (équation (303)), voir « Notes ».

► Question 25.5.

Valeurs numériques. Les valeurs expérimentales du rayon en fonction du débit sont tracées sur la figure 87. Peut-on les comparer directement, soit à l'équation (307), soit à l'équation (309), pour voir si notre analyse explique bien l'expérience ? Oui, mais ce n'est sûrement pas le meilleur test. En effet, D et R sont assez faciles à mesurer précisément. En revanche, $a(0)$ et H sont mesurés assez imprécisément, et donc ce serait une mauvaise idée de les injecter dans les équations (307) et (309).

Pour améliorer le test, mieux vaut utiliser l'expression inverse. Connaissant D et R avec précision, on peut les injecter dans les équations (304) et (306) et en tirer des valeurs de a et de H bien prédites. Elles sont tracées sur la figure 88. On constate un accord tout à fait correct avec les valeurs qu'on mesure (approximativement) avec un double décimètre, qui étaient : $a(0) = 0,25$ cm et $H = 0,5$ cm, pour

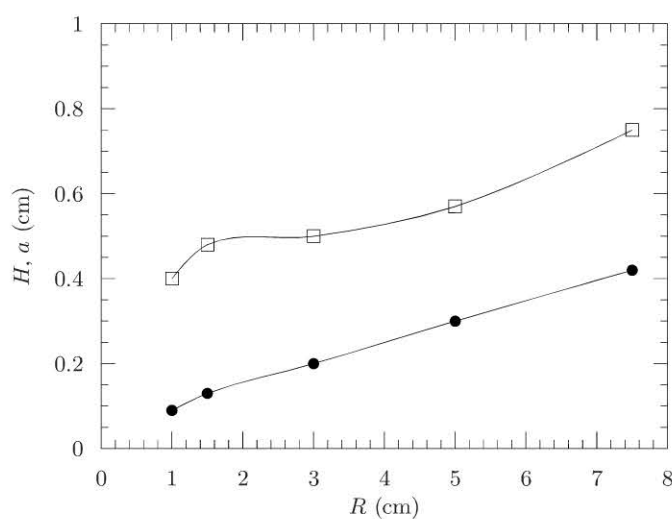


Figure 88 Valeurs de H (carrés blancs) et de $a(0)$ (cercles noirs).
Les valeurs sont déduites des mesures de R et D tracées sur la figure 87,
en utilisant les équations (304) et (306).

$R = 5 \text{ cm}$ et $D = 35 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. On peut également calculer h/H en utilisant l'équation (306), qui donne :

$$\frac{h}{H} = \frac{a(0)^2}{2R},$$

soit h/H typiquement toujours de l'ordre de 10^{-2} . C'est cohérent avec l'estimation $h = 0,01 \text{ cm}$; surtout, cela justifie amplement les approximations $h \ll H$ et $v \gg w$.

Notes.

- On a probablement obtenu une bonne explication de la situation physique, voir l'article [1]. En tous cas, les ordres de grandeur sont bons. Rappelons qu'au contraire, si l'on avait écrit que l'énergie mécanique se conserve jusqu'à après le ressaut, on aurait obtenu que l'eau remonte à sa hauteur initiale : $H = Z$, soit une valeur aberrante de 30 cm (ce n'est visiblement pas le cas !).
- Ce rond est un exemple de choc en hydrodynamique. On en trouve d'autres exemples dans la nature : tsunامي (raz-de-marée), solitons.

Ouvertures. Expliquez pourquoi le jet qui sort du robinet se fractionne en gouttelettes lorsque a s'amincit (le débit des gouttes est très faible). Ce phénomène est analysé dans la référence [2].

Sources et références

Ce ressaut hydraulique a fait l'objet de nombreuses études ; l'article [1] les passe en revue, les résume de façon accessible, et présente quelques expériences simples. Il mesure et discute aussi l'effet de différents paramètres : densité et viscosité du liquide ; forme, matériau et horizontalité du fond de l'évier ; effet de l'évacuation de l'eau sur la hauteur H ; etc. Surtout il discute le mécanisme de formation de ce ressaut, tel qu'introduit par l'article [3] : le ressaut se forme à l'endroit où la « couche limite » (la zone du film où la vitesse de l'eau diminue à cause du frottement sur la paroi) envahit toute l'épaisseur du film.

- [1] Y. BRÉCHET et Z. NÉDA. On the Circular Hydraulic Jump. *American Journal of Physics*, volume 67, 1999, pages 723-731.
- [2] F. GRANER. *Petits problèmes de physique – première partie*. Springer, Heidelberg, 1998. Exercice N.
- [3] P. GODWIN. The Hydraulic Jump ('Shocks' and Viscous Flow in the Kitchen Sink). *American Journal of Physics*, volume 61, 1993, pages 829-832.

Corrigé 26 Moteur à flotte : (1) la reine de l'éjection

(Énoncé à la page 42)

► Question 26.1.

Première approche. En résumé, que se passe-t-il ? Sous l'effet de la pression, l'eau sort rapidement. Par réaction, cela fait accélérer la fusée. Très vite, la fusée est vide. Elle continue à monter sur sa lancée, puis retombe. Pouvez-vous essayer de préciser cela quantitativement ?

Notations. Pour cela, faites en vrac la liste des grandeurs physiques pertinentes :

- Les volumes : le volume V_f de la fusée est fixe ; celui de l'air $V_a(t)$ augmente ; celui $V_e(t)$ de l'eau contenue dans la fusée diminue (voir la figure 89).
- Les masses : la masse M_f de la coque de la fusée est constante ; la masse $M_e(t)$ de l'eau qu'elle contient diminue.
- La pression : à l'extérieur, P_{atm} est constante ; dans la fusée, la pression $P_a(t)$ de l'air diminue.
- Les vitesses : $v_e(t)$ vitesse d'éjection de l'eau (par rapport à la fusée), $v_s(t)$ vitesse absolue de l'eau par rapport au sol, $v_f(t)$ vitesse absolue de la fusée. Ces trois vitesses sont certainement variables, mais il est difficile d'imaginer exactement dans quel sens elles varient. On notera $a_f(t) = \dot{v}_f$ l'accélération de la fusée.
- Divers paramètres : la section S de la fusée, l'aire A du trou ; et aussi l'accélération g de la pesanteur, et la masse volumique ρ_e de l'eau.

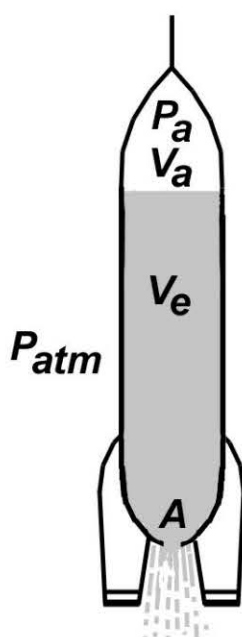


Figure 89 Notations.

► Question 26.2.

Analyse qualitative. On a compté ci-dessus sept quantités variables. Combien de relations pourrez-vous écrire ?

- la conservation du volume relie V_a et V_e ;
- l'addition des vitesses (galiléenne) relie v_s , v_e , v_f ;
- l'équation de continuité de l'eau, c'est-à-dire la conservation de la masse, relie M_e et v_e ;
- la masse volumique de l'eau relie M_e et V_e ;
- l'équation constitutive de l'air relie P_a et V_a ;
- une relation dynamique, qui exprime que l'éjection de l'eau fait avancer la fusée par réaction, relie v_f et v_e ;
- une autre relation dynamique, qui exprime que la pression est le moteur de l'éjection, relie P_a et v_e .

Cela fait exactement sept équations, le compte est bon. Vous pouvez continuer.

► Question 26.3.

Simplifications et mise en équations. Prenez ces équations une par une, en procédant si besoin à des simplifications, pour que ce problème reste abordable. On n'étudie que le mouvement vertical de la fusée, donc c'est un problème à une dimension.

- La conservation du volume est exacte :

$$V_a(t) + V_e(t) = V_f ; \dot{V}_a + \dot{V}_e = 0. \quad (310)$$

- La relation galiléenne est aussi exacte. Si l'on compte les vitesses positives vers le haut, on a toujours $v_e < 0$ et :

$$v_f(t) = v_s(t) - v_e(t). \quad (311)$$

- Troisième relation exacte : la conservation de l'eau :

$$\dot{M}(t) = \rho_e A v_e(t). \quad (312)$$

Attention, les signes sont bien corrects : ici les deux membres sont négatifs.

- On ne perd rien en supposant que la masse volumique de l'eau est constante :

$$M_e(t) = \rho_e V_e(t). \quad (313)$$

C'est une approximation analytique raisonnable, voir page 4.

- On fait l'approximation usuelle que l'air est un gaz parfait, donc que $P_a V_a / T$ est constant, voir page 5. Pour simplifier, on peut même écrire que sa température est constante, en gardant en tête que cela n'a rien d'évident (voir « Notes ») :

$$P_a(t) V_a(t) = \text{constante} = P_a(0) V_a(0). \quad (314)$$

- Comme on veut déterminer la réaction, qui est une force, mieux vaut passer par les forces que par l'énergie. On peut faire le bilan de la quantité de mouvement d'un système fermé. Pour cela, on se place entre les instants t et $t + dt$. On prend comme système la fusée, de masse M_f (qui inclut la masse de l'air enfermé), l'eau qu'elle contient de masse $M_e(t)$, et la masse d'eau dm éjectée entre t et $t + dt$. L'équation (312) donne :

$$dm = -dM_e = -\rho_e A v_e(t) dt > 0.$$

On peut calculer la contribution de la poussée (à laquelle s'ajouteront ultérieurement la gravité et la friction due à l'air extérieur) :

$$[M_f + M_e(t) + dm]v_f(t) = [M_f + M_e(t)]v_f(t + dt) + dm v_s(t).$$

En écrivant alors que $v_f(t + dt) = v_f(t) + \dot{v}_f(t) dt$, on trouve :

$$[M_f + M_e(t)]\dot{v}_f(t) = v_e \dot{M}_e(t) > 0. \quad (315)$$

- Enfin, pour trouver la vitesse d'éjection v_e sous l'effet de la pression, il faut écrire une équation dynamique pour l'eau à l'intérieur de la fusée. Parmi les sept équations à écrire, c'est probablement celle-ci la plus difficile à trouver par tâtonnements, si l'on n'a pas l'habitude de ce mode de raisonnement.

Forces ou énergie ? Pour pouvoir écrire la conservation de l'énergie, il faut plusieurs conditions. On ne les discutera pas ici, car il s'agit vraiment de mécanique des fluides. Elles sont plutôt bien vérifiées : il faut que l'écoulement soit incompressible, assez régulier (ce qu'on appelle « laminaire », sans tourbillons), et sans viscosité, voir « Notes ». Avec ces simplifications, on peut commencer à écrire la conservation de l'énergie appliquée à l'ensemble du fluide, appelée « équation de Bernoulli ».

L'ensemble du fluide se déplace entre t et $t + dt$. Du côté du trou, il se déplace à vitesse v_e , donc avance de $dx = v_e dt$, donc balaye un volume $dV = A v_e dt$ et reçoit un travail $-P_{\text{atm}} dV$. À l'autre bout, il avance du même volume dV , par la conservation de la masse. En fait, il avance à une vitesse bien plus faible, négligeable devant v_e , mais la section est plus grande, et le produit « aire \times section » reste égal à $A v_e$. Il reçoit donc le travail $+P_a dV$, et cela fait augmenter son énergie cinétique d'une valeur $\rho_e dV v_e^2/2$.

Pouvez-vous et devez-vous négliger l'énergie potentielle de pesanteur du liquide devant ces termes de pression et d'énergie cinétique ? La réponse est à la page 286 : $\rho g h$ vaut une atmosphère quand h vaut 10 m d'eau. Ici, avec une hauteur d'eau de

quelques dizaines de centimètres, ρgh est de l'ordre de 10^{-2} atm : c'est bien négligeable devant $P_a - P_{\text{atm}}$ (voir ci-dessous).

Bon, nous avons fait le tour, et nous pouvons enfin écrire l'équation de conservation de l'énergie du fluide :

$$-P_{\text{atm}} dV + P_a(t) dV = \rho_e dV \frac{v_e^2}{2}.$$

Attention : on a bien écrit ici la conservation de l'énergie de tout le volume d'eau V_e (et non pas simplement celle du petit volume dV , comme cette équation tendrait à faire croire). En simplifiant par dV , on trouve la dernière équation manquante :

$$v_e = \sqrt{2 \frac{P_a(t) - P_{\text{atm}}}{\rho_e}}. \quad (316)$$

Regroupement et vérifications. Pouvez-vous rassembler ces équations ?

- Pour trouver la poussée R due à la réaction, on peut combiner les équations (312), (315) et (316) :

$$R(t) = |v_e \dot{M}_e(t)| = \rho_e A v_e^2 = 2(P_a(t) - P_{\text{atm}})A. \quad (317)$$

Vérifiez cette équation. Une pression multipliée par une aire est bien une force, en newtons ; par ailleurs $\rho A v^2$ est en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \times \text{m}^2 \times \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, soit des $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ donc encore des newtons : l'équation est homogène. Le signe et le comportement sont corrects, puisque la poussée est positive et mue par $P_a - P_{\text{atm}}$.

- Pour trouver la variation \dot{V}_a du volume de l'air, on peut combiner les équations (312), (313) et (316) :

$$\dot{V}_a = A v_e = A \sqrt{2 \frac{P_a(t) - P_{\text{atm}}}{\rho_e}}. \quad (318)$$

Vérification de l'homogénéité : une pression divisée par une masse volumique est en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$, c'est donc une vitesse au carré. Le membre de droite est donc bien en $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Le signe et le comportement sont corrects, puisque la variation de V_a est positive et mue par $P_a - P_{\text{atm}}$.

- Pour relier \dot{V}_a à la pression, on peut dériver l'équation (314) par rapport au temps :

$$\dot{P}_a = -\frac{P_a(0) V_a(0)}{V_a^2} \dot{V}_a = -\frac{P_a^2}{P_a(0) V_a(0)} \dot{V}_a. \quad (319)$$

C'est visiblement homogène, et le signe est bon puisque $\dot{V}_a > 0$ et $\dot{P}_a < 0$.

– Pour éliminer \dot{V}_a , on peut rassembler les équations (318) et (319) :

$$\dot{P}_a = -\frac{P_a^2}{P_a(0)V_a(0)} A \sqrt{2 \frac{P_a(t) - P_{\text{atm}}}{\rho_e}}. \quad (320)$$

► Question 26.4.

Première approche. Maintenant que vous avez ces équations, qu'allez-vous en faire ?

Que cherchez-vous ? La hauteur Z_f atteinte par la fusée en haut de sa course. Comment détermineriez-vous Z_f ? Notons $z_f(t)$ la hauteur de la fusée et $\dot{z}(t) = v_f(t)$ sa vitesse, qui est verticale. À la fin de l'étape de poussée, qui dure un temps τ_p , la fusée sera à une hauteur $z_f(\tau_p)$ et aura une vitesse verticale $v_f(\tau_p)$. Elle suit alors une trajectoire balistique (voir la figure 90), si l'on néglige la friction de l'air (voir « Notes ») :

$$gz_f(t) + \frac{1}{2} v_f^2(t) = \text{constante} = gz_f(\tau_p) + \frac{1}{2} v_f^2(\tau_p). \quad (321)$$

La hauteur maximum Z_f est celle pour laquelle $v_f = 0$:

$$Z_f = z_f(\tau_p) + \frac{1}{2g} v_f^2(\tau_p). \quad (322)$$

Il vous faut donc calculer $z_f(\tau_p)$ et $v_f(\tau_p)$. Pouvez-vous le faire ? Il faudrait déterminer à tout instant l'accélération de la fusée, et pour cela la poussée (donc la pres-

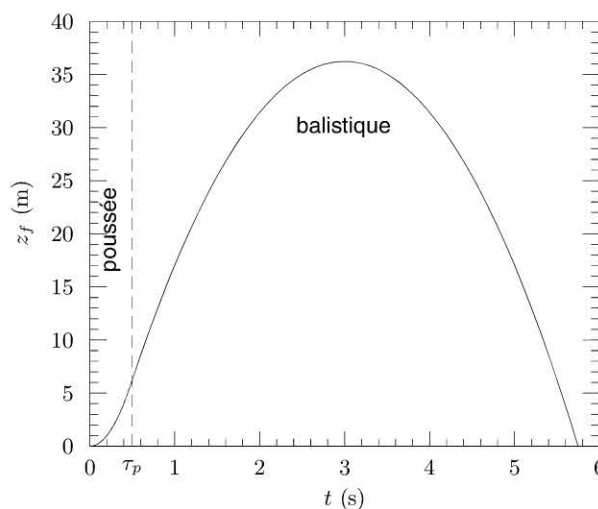


Figure 90 L'étape de poussée a une accélération positive.

Pour tracer ce graphe, on l'a supposée constante et égale à $+5\text{ g}$ pendant $0,5\text{ s}$, voir page 255.

L'étape balistique a une accélération négative ($-g$) constante.

sion de l'air) divisée par la masse de la fusée (et donc la quantité d'eau). C'est impossible analytiquement, voir « **Notes** ».

Mais avez-vous besoin de résoudre toutes ces équations ? L'énoncé ne demande pas de calculer toutes les variables en fonction du temps. On cherche juste des nombres : la durée de l'étape de poussée, la hauteur et la vitesse qu'elle permet d'atteindre. Mieux même, on n'a même pas besoin de connaître exactement ces valeurs : on cherche juste comment elles dépendent des paramètres du problème. Cela suffira pour comprendre physiquement ce qui se passe, et choisir au mieux ces paramètres.

Analyse quantitative et simplifications. Remplacez donc chaque quantité par sa valeur moyenne.

- Tout d'abord, puisque $P_a(t)$ part initialement de la valeur $P_a(0)$ et finit proche de P_{atm} , prenez par exemple :

$$\overline{P_a} \approx \frac{P_a(0) + P_{\text{atm}}}{2}. \quad (323)$$

En injectant l'équation (323) dans l'équation (317) on obtient la moyenne de la poussée :

$$\overline{R} = 2(\overline{P_a} - P_{\text{atm}})A = (P_a(0) - P_{\text{atm}})A. \quad (324)$$

De même, en injectant l'équation (323) dans l'équation (316) on obtient une vitesse d'éjection typique :

$$\overline{v_e} = \sqrt{2 \frac{\overline{P_a} - P_{\text{atm}}}{\rho_e}} = \sqrt{\frac{P_a(0) - P_{\text{atm}}}{\rho_e}}. \quad (325)$$

- Ensuite, prenons comme masse moyenne de l'eau (équation (313)) :

$$\overline{M_e} = \frac{M_e(0)}{2} = \rho_e \frac{V_e(0)}{2}. \quad (326)$$

Procédons à deux approximations, qu'il faudra vérifier (page 256) : pendant la poussée, on néglige l'effet de la pesanteur g devant a_f , ainsi que la masse M_f de la coque de la fusée devant la masse M_e de l'eau. On obtient l'ordre de grandeur de l'accélération $a_f(t) = \dot{v}_f$ de la fusée en combinant les équations (324) et (326) :

$$\overline{a_f} = \frac{\overline{R}}{\overline{M_e}} = \frac{2A}{\rho_e V_e(0)} [P_a(0) - P_{\text{atm}}]. \quad (327)$$

- Enfin, il faut déterminer la durée τ_p de la poussée. Par quel mécanisme la poussée s'essouffle-t-elle ? On peut en envisager deux :
 - mécanisme n° 1 : il reste de la surpression, mais la fusée s'est vidée de toute son eau (ensuite, ce qui reste d'air sous pression sort brusquement en faisant « pschitt », sans grande efficacité). Cela arrive au bout d'un temps τ_1 :

$$\tau_1 = \frac{V_e(0)}{|\dot{V}_e|},$$

qui, d'après les équations (310), (318) et (325), vaut :

$$\tau_1 = \frac{V_e(0)}{A\bar{v}_e} = \frac{V_e(0)}{A} \sqrt{\frac{\rho_e}{P_a(0) - P_{\text{atm}}}}; \quad (328)$$

- mécanisme n° 2 : il reste de l'eau, mais la pression intérieure a chuté jusqu'à la valeur P_{atm} (ensuite, ce qui reste d'eau sort sous son propre poids, sans grande efficacité). Cela arrive au bout d'un temps τ_2 :

$$\tau_2 = \frac{P_a(0)}{|\dot{P}_a|},$$

qui, d'après les équations (319), (320) et (325), vaut :

$$\tau_2 = \frac{P_a^2(0)V_a(0)}{\bar{P}_a^2 A\bar{v}_e} = \left[\frac{2P_a(0)}{P_a(0) + P_{\text{atm}}} \right]^2 \frac{V_a(0)}{A} \sqrt{\frac{\rho_e}{P_a(0) - P_{\text{atm}}}}. \quad (329)$$

- En résumé, la poussée s'arrête dès que soit le temps τ_1 , soit le temps τ_2 s'est écoulé. La durée de la poussée est donc le plus petit de ces deux temps (équations (328), (329)) :

$$\tau_p = \min(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{A\bar{v}_e} \min\left(V_e(0), \frac{P_a^2(0)V_a(0)}{\bar{P}_a^2}\right). \quad (330)$$

Regroupement. Finalement, on connaît tout sur l'étape de poussée :

- On connaît son accélération moyenne \bar{a}_f (équation (327)) ainsi que sa durée τ_p (équation (330)).
- On en déduit la vitesse $v_f(\tau_p) = \bar{a}_f \tau_p$ et la hauteur $z_f(\tau_p) = \bar{a}_f \tau_p^2 / 2$ de la fusée à la fin de la poussée.

- On en tire la hauteur maximum Z_f de la fusée, en haut de sa trajectoire (équation (322)), toujours avec l'approximation $\bar{a}_f \gg g$:

$$Z_f = \frac{\bar{a}_f \tau_p^2}{2} + \frac{\bar{a}_f^2 \tau_p^2}{2g} = \frac{\bar{a}_f^2 \tau_p^2}{2g} \left(1 + \frac{g}{\bar{a}_f}\right) \approx \frac{(\bar{a}_f \tau_p)^2}{2g}, \quad (331)$$

où l'on a (équations (310), (327) et (330)) :

$$V_f = V_a(0) + V_e(0),$$

$$\bar{a}_f = \frac{2A}{\rho_e V_e(0)} [P_a(0) - P_{\text{atm}}], \quad (332)$$

$$\tau_p = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{\rho_e}{P_a(0) - P_{\text{atm}}}} \min \left(V_e(0), \left[\frac{2P_a(0)}{P_a(0) + P_{\text{atm}}} \right]^2 V_a(0) \right).$$

On veut maximiser Z_f (équation (331)), ce qui revient à maximiser $\bar{a}_f \tau_p$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2gZ_f} &= \bar{a}_f \tau_p \\ &= 2 \sqrt{\frac{P_a(0) - P_{\text{atm}}}{\rho_e}} \min \left(1, \left[\frac{2P_a(0)}{P_a(0) + P_{\text{atm}}} \right]^2 \frac{V_f - V_e(0)}{V_e(0)} \right) \end{aligned} \quad (333)$$

Ouf !

Vérifications et discussion. Est-ce bien homogène ? Oui, le terme dans la parenthèse est sans dimension, tandis que gZ et P/ρ sont tous deux les carrés d'une vitesse. Le signe a l'air correct, puisque tout est positif. Le comportement est-il raisonnable ? Discutez grossièrement l'effet des différents paramètres :

- Le diamètre du trou a disparu, il ne joue pas. En fait, plus il est grand, plus la poussée est grande, mais moins elle dure longtemps ; le produit durée \times poussée reste constant. Certes, il faut que le trou soit assez petit devant la section du corps de la fusée, pour qu'on puisse faire les approximations ci-dessus ; et assez grand, pour que l'écoulement soit régulier ; mais sa taille exacte n'est pas cruciale du tout. En pratique, le goulot d'une bouteille convient tout à fait.
- Le volume total ne joue pas. Naturellement, il est intéressant de choisir une bouteille assez grande, disons au moins un litre ou deux, pour pouvoir la manipuler facilement. Surtout, la poussée croît comme le volume de la bouteille alors que la friction de l'air ne croît que comme sa surface : si l'on veut pouvoir négliger la friction de l'air devant la poussée, mieux vaut un grand volume.

- Le paramètre essentiel est le taux de remplissage, c'est-à-dire la proportion initiale d'eau et d'air. On maximise l'expression (333) quand le minimum vaut 1, donc quand le deuxième terme dans la parenthèse est au moins égal à 1 :

$$\frac{V_f - V_e(0)}{V_e(0)} \geq \left[\frac{P_a(0) + P_{\text{atm}}}{2P_a(0)} \right]^2 = \frac{1}{4} \left[1 + \frac{P_{\text{atm}}}{P_a(0)} \right]^2 \approx \frac{1}{4}.$$

Cela correspond à un taux de remplissage initial :

$$\frac{V_e(0)}{V_f} \leq \frac{4}{5} = 0,8. \quad (334)$$

Si ce critère est vérifié, le volume d'eau initial ne joue quasiment plus aucun rôle. Le mécanisme limitant est toujours le n°1 (page 253), c'est-à-dire que la poussée s'arrête quand la fusée est vide. Comme le constate la référence [1], il est donc conseillé, mais pas vraiment crucial, de se mettre près de la valeur indiquée par l'équation (334) : $V_e(0) = 0,8 \times V_f$. La hauteur atteinte est alors :

$$\begin{aligned} Z_f &= \frac{2}{g} \frac{P_a(0) - P_{\text{atm}}}{\rho_e} = \left(\frac{P_a(0)}{P_{\text{atm}}} - 1 \right) \frac{2P_{\text{atm}}}{g\rho_e} \\ &= \left(\frac{P_a(0)}{P_{\text{atm}}} - 1 \right) \times 20 \text{ m}. \end{aligned} \quad (335)$$

- Reste donc le dernier paramètre sur lequel on peut agir : la pression initiale de l'air $P_a(0)$. Pour maximiser l'équation (335), la pression $P_a(0)$ doit être la plus grande possible. On pouvait s'y attendre : plus on pompe au départ, mieux la fusée marche. On choisira donc la pression maximale qu'on est capable d'atteindre avec la pompe qu'on possède, et que la bouteille supporte avant de craquer.

Valeurs numériques. Il faut évaluer l'ordre de grandeur de l'accélération a_f (équation (327)) :

- Avec une pompe à vélo normale, on atteint environ $P_a(0) = 4$ bars, ce qui est acceptable pour une fusée jouet (voir référence [1]). Si l'on prend pour fixer les idées $A = 1 \text{ cm}^2$, et $V_e(0) = 1 \text{ l}$, on trouve que la poussée contribue à l'accélération pour $60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, soit 6 g. L'accélération de la fusée est donc environ +5 g. La vitesse d'éjection est de l'ordre de $v_e = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, donc le litre se vide en $\tau_p = \tau_1 = 0,5 \text{ s}$. À la fin de la poussée, la fusée a une vitesse $v_f(\tau_p) = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et une hauteur $z_f(\tau_p) = 3 \text{ m}$, elle monte à une trentaine de mètres (voir la figure 90). C'est compatible avec la référence [1] qui trouve un peu moins de 30 m.
- Avec une grosse pompe à bras, manipulée par deux personnes, on peut arriver à 8 bars. C'est supportable par les bouteilles de soda (elles tiennent 10 bars). En

pratique on atteint $Z_f \approx 150$ m [2]. Cela se rapproche de l'équation (335). En effet, plus la pression initiale est élevée, meilleures sont les approximations : il devient valide de négliger la friction due à l'air, ou la gravité pendant la poussée, ainsi que la masse M_f de la coque de la fusée devant la masse M_e de l'eau, voir page 252.

Notes. On a dû faire de très nombreuses approximations, car ce problème est compliqué.

- On a négligé la friction due à l'air, et la viscosité de l'eau.
- On a négligé un paramètre essentiel : le temps qu'on met à déboucher la bouteille. Il faut déboucher brusquement, sur un temps bien plus petit que τ_p . Si la bouteille est sous forte pression, ce n'est pas très pratique. On peut inventer un petit système où le bouchon est retenu par un crochet, dans lequel on passe une petite barre horizontale (une goupille) qu'on tire brutalement [2]. En pratique, si on bricole sa bouteille sans astuce particulière, et donc si son ouverture prend du temps, mieux vaut y mettre un peu moins d'eau.
- La détente du gaz est trop rapide pour être isotherme, pas assez isolée de l'extérieur pour être adiabatique : elle est un peu entre les deux. Pour simplifier les calculs, on a supposé qu'elle était isotherme. Cela contraste avec des exercices comme l'exercice 24, où il est essentiel de distinguer les types de détente.
- Puisqu'on décrit correctement l'expérience, cela veut dire qu'on n'a pas perdu beaucoup de physique lorsqu'on a procédé à ces approximations. En particulier, comme le prouve l'équation (335), la hauteur atteinte dépend peu des différents paramètres, à part la pression initiale.
- Le modèle est donc robuste. C'est pour cette raison que Finney [1] remarque avec surprise l'excellent accord entre sa solution et ses mesures, sans aucun paramètre ajustable.
- On ne peut pas résoudre analytiquement ces équations. La seule exception est l'équation (320) : elle est à variables séparables, et permet de trouver P_a en fonction de t (ou plutôt t en fonction de P_a).
- En revanche, ces équations différentielles du premier ordre se prêtent bien à une résolution numérique par ordinateur. C'est un bon exercice, réalisé dans la référence [1]. La résolution numérique permet même d'inclure des termes supplémentaires, comme la friction due à l'air.

Ouvertures. Petit problème qu'on peut poser : si vous faisiez l'expérience, comment mesureriez-vous la hauteur ? Proposez diverses méthodes et discutez la plus précise.

Lorsque les vitesses et les hauteurs sont petites, le plus précis semble de mesurer les temps de vol, entre le moment où la fusée part et retombe sur le sol [1]. En effet, la friction due à l'air reste assez petite pour ne pas trop modifier la durée du vol.

Lorsque la fusée monte très haut, on peut avoir une meilleure précision en mesurant l'angle. On se met à 200 m de là, avec un rapporteur gradué pour estimer à quel angle maximal monte la fusée [2].

Sources et références

La manipulation est facile, si on se contente de faire monter la fusée de quelques mètres au-dessus d'une cour de lycée ou d'un jardin. Si on veut une fusée plus performante, il y a de nombreux sites sur internet, mais attention à la sécurité, et à l'emplacement choisi pour le décollage ! J'ai aussi eu deux sources plus approfondies :

- [1] G.A. FINNEY. Analysis of a Water-Propelled Rocket: A Problem in Honors Physics. *American Journal of Physics*, volume 68, Mars 2000, pages 223-227.
- [2] Association « LES PETITS DÉBROUILLARDS », Grenoble. Ce sont les rois de l'éjection. Ils font des démonstrations à environ 150 m de hauteur, en particulier près de la fontaine de Genève dont le jet s'élève justement à cette hauteur. La sécurité devient difficile à assurer, il faut prévoir de se dégager une bonne centaine de mètres de rayon tout autour du site de lancement.

Corrigé 27 Moteur à flotte : (2) Ce drôle d'oiseau qui se branche à l'eau (Énoncé à la page 43)

► Question 27.1.

Manipulation. Pour mesurer la quantité d'eau consommée par l'oiseau, il faut repérer le niveau d'eau dans le verre à un moment donné, et le repérer à nouveau un peu plus tard :

- Si l'on se contente de regarder l'oiseau pendant une heure : la baisse de niveau n'est que de 0,1 mm. C'est difficilement perceptible à l'œil.
- Mieux vaut laisser l'oiseau fonctionner quelques jours : la baisse de niveau est plus grande, donc plus facile à mesurer.
- Attention : le niveau d'eau baisse à cause de la consommation de l'oiseau, mais aussi de son évaporation naturelle depuis la surface du verre d'eau. Comment distinguer ces deux contributions ?

Pour cela, j'ai placé côte-à-côte deux verres d'eau de 8 cm de diamètre, rigoureusement identiques : l'un sert à alimenter l'oiseau, l'autre ne sert que de référence. J'ai constaté que, dans le verre où l'oiseau trempe, le niveau d'eau baisse deux fois plus vite que dans le verre témoin. Ainsi, sur cent heures (quatre jours), j'ai mesuré une baisse de 5 mm dans le témoin et de 10 mm dans le verre de

l'oiseau. La consommation de l'oiseau est donc responsable d'une baisse de 5 mm, soit un débit volumique de :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{1}{100 \text{ h}} \times (0,5 \text{ cm}) \times \frac{\pi \times (8 \text{ cm})^2}{4} \\ &= \frac{25 \text{ cm}^3}{100 \text{ h}} = 6 \text{ cm}^3 \cdot \text{jour}^{-1} = 7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}.\end{aligned}\quad (336)$$

► Question 27.2.

Première approche.

- L'oiseau décrit-il un cycle ? Oui : en moyenne, il ne change pas.
- L'oiseau consomme-t-il de l'énergie ? Oui, il dissipe visiblement de l'énergie à chaque période. Par exemple, quand le niveau du liquide coloré monte, le liquide acquiert une certaine énergie potentielle de pesanteur ; lorsque l'oiseau se penche, il la perd intégralement.
- D'où peut venir l'énergie qui alimente le cycle de l'oiseau ? Il n'y a pas le choix : l'oiseau n'est en contact qu'avec l'eau et l'atmosphère. Or, quand l'oiseau accomplit un cycle, qu'est-ce qui a changé ? Il y a moins d'eau dans le verre, et comme elle a bien dû aller quelque part, il y a certainement un peu plus de vapeur d'eau dans l'atmosphère. L'oiseau arrive donc à augmenter l'évaporation et à l'utiliser à son profit comme source d'énergie utile.
- Quel peut être le lien entre l'évaporation et les échanges d'énergie ? Cela ne peut être que la chaleur latente d'évaporation de l'eau. À chaque fois que de l'eau est évaporée, l'énergie correspondante est prélevée, par échange de chaleur, sur l'énergie interne de l'atmosphère. Elle-même est réalimentée par le Soleil.
- L'oiseau fonctionne tant que le niveau de l'eau dans le verre est assez haut pour que le bec trempe. L'autonomie de l'oiseau est d'environ huit jours. Au bout de ce temps, le niveau de l'eau a baissé de plus de 2 cm, et le bec est trop court pour l'atteindre. Si l'on veut éviter que l'oiseau ne s'arrête, il faut alors remettre de l'eau dans le verre.
- L'oiseau respecte donc bien les deux principes de la thermodynamique. C'est une machine thermique ouverte. C'est l'exact analogue du réfrigérateur de brousse (exercice 13.1), sauf que l'oiseau fonctionne comme moteur : il fournit du travail, et non une chaleur.

► Question 27.3.

Analyse qualitative. Alors, comment ça marche ?

- Quelle force fait monter le liquide coloré, malgré la gravité ? Comme il est dans un tube bouché, il n'y a pas de force qui vient de l'extérieur de l'oiseau. La seule

force possible est due à la différence de pression entre le gaz contenu dans la tête et dans le ventre de l'oiseau (voir la figure 91(a)). On voit augmenter la différence de hauteur entre les deux surfaces libres du liquide coloré : cela indique que cette différence de pression augmente.

- Qu'est-ce qui fait croître cette différence de pression ? Les deux gaz étant isolés mécaniquement de l'extérieur, c'est nécessairement une différence de température qui est à l'œuvre.
- Est-ce le ventre qui chauffe, ou la tête qui refroidit ? La feutrine qui couvre la tête et le bec est imbibée d'eau. C'est donc certainement dans la tête que tout se passe. Cette eau doit s'évaporer lentement, en prenant de la chaleur à la tête de l'oiseau.

Description du cycle. On peut alors résumer l'ensemble du cycle. Il s'agit d'oscillations de relaxation, comme dans la coccinelle (voir exercice 28) ou l'oiseau pic-pic [1]. L'oiseau oscille entre plusieurs états dont aucun n'est stable. Il y a quatre étapes. L'étape (1) est la plus longue : c'est elle qui détermine la durée du cycle ; les trois autres ne durent que quelques secondes.

- (1) Au début, le liquide coloré est dans le ventre de l'oiseau, et il bouche le tube (voir la figure 91(a)). L'eau qui imbibe la feutrine s'évapore. Ce faisant, elle refroidit la tête de l'oiseau. Dans la tête, la pression du gaz baisse. Le liquide monte donc.
- (2) Cela fait monter progressivement le barycentre G de l'oiseau. La répartition de masse de l'oiseau, et en particulier la masse de son bec mouillé, font que G passe en haut et à gauche de l'axe de rotation O (figure 91(a)). L'oiseau devient instable et bascule sur la gauche (figure 91(b)).

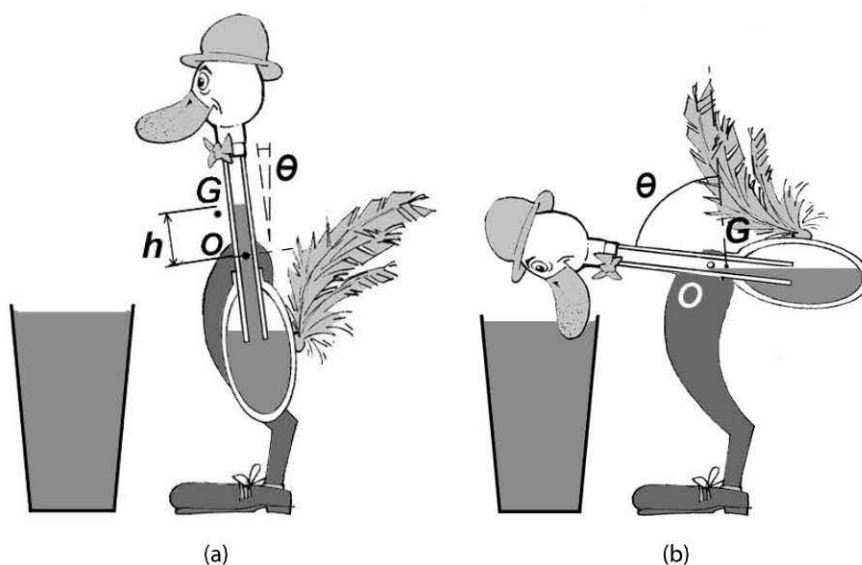


Figure 91 Notations.

- (3) L'oiseau heurte le verre (voir la figure 91(b)). Il y dissipe intégralement son énergie cinétique : en partie lors du choc du cou de l'oiseau sur le verre, en partie par la viscosité du liquide. Il y fait d'une pierre deux coups : d'une part, le bec se réimbibe d'eau, compensant celle qui s'est évaporée. D'autre part, le liquide ne bouche plus le tube ; donc le gaz du ventre et de la tête communiquent ; donc le liquide s'écoule et revient dans le ventre.
- (4) Le barycentre G revient alors dans le ventre de l'oiseau. L'oiseau se redresse verticalement. Le cycle peut recommencer (figure 91(a)).

► Question 27.4.

Notations. Notons par exemple :

- $\Delta t = 90$ s la durée typique d'un cycle ;
- $S = \pi \times (8 \text{ mm})^2 / 4 = 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$, la section du tube ;
- $L_e = 2,4 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ la chaleur latente d'évaporation de l'eau (voir page 287),
 \dot{Q}_{atm} la chaleur fournie par l'atmosphère au cours d'une période Δt ,
 $\dot{Q}_{\text{atm}} = Q_{\text{atm}} / \Delta t$ la puissance fournie correspondante.

Mise en équations et valeurs numériques.

- On obtient les valeurs de l'énergie et de la puissance fournies en écrivant que c'est \dot{Q}_{atm} qui permet d'évaporer le débit volumique déterminé à l'équation (336) :

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{\text{atm}} &= L_e \rho \dot{V} = 2,4 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \\ &= 0,17 \text{ W},\end{aligned}$$

$$Q_{\text{atm}} = \Delta t \times \dot{Q}_{\text{atm}} = 90 \text{ s} \times 0,17 \text{ W} = 15 \text{ J}. \quad (337)$$

- On obtient l'énergie utile en calculant par exemple la variation ΔE_{pot} de l'énergie potentielle du liquide coloré. En effet, à chaque période, l'oiseau convertit de chaleur en travail la quantité d'énergie ΔE_{pot} , qui est ensuite dissipée. Si l'on calcule ΔE_{pot} par l'élévation du niveau de liquide dans le tube (en négligeant la variation de niveau dans l'ampoule du bas), on obtient :

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{pot}} &= \int_0^h \rho g S z \, dz = \rho g S \frac{h^2}{2} \\ &= 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \times \frac{(0,1 \text{ m})^2}{2} \\ &= 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ J}.\end{aligned} \quad (338)$$

La puissance \mathcal{P} et la création d'entropie ΔS correspondantes sont :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta t} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ W}, \\ \Delta S &= \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{T_{\text{amb}}} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}, \\ \dot{S} &= \frac{\mathcal{P}}{T_{\text{amb}}} = 10^{-7} \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}.\end{aligned}\tag{339}$$

Ce sont des valeurs minuscules, encore plus petites que pour le réfrigérateur de brousse (équation (143)) ou même que la coccinelle (équation (342)). On est loin de pouvoir exploiter industriellement ce moteur. Pourtant, en terme d'énergie utilisable par unité de masse, l'eau n'est pas ridicule face aux hydrocarbures, voir page 149.

- Estimons les performances de ce moteur. Puisque \dot{Q}_{atm} n'est pas une puissance que l'on paye, et \mathcal{P} n'est pas une puissance que l'on utilise, leur rapport n'est pas à proprement parler un rendement, plutôt une efficacité, qui vaut :

$$e = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{Q_{\text{atm}}} = \frac{2,5 \cdot 10^{-3} \text{ J}}{15 \text{ J}} = 1,7 \cdot 10^{-4}.$$

Cette efficacité est très faible (voir « **Notes** »). L'oiseau est loin d'être un moteur optimal. Mais pourquoi le constructeur aurait-il cherché à l'améliorer ? Tel quel, il remplit très bien son rôle, celui d'un jouet décoratif et surprenant.

► Question 27.5.

Analyse qualitative. La durée du cycle est très variable, pour deux raisons différentes :

- Variabilité d'une fois sur l'autre : lorsque l'oiseau finit un cycle, il n'est pas rigoureusement identique à son état lorsqu'il a commencé. La quantité d'eau dans la feutrine peut être très légèrement différente, la température ou la pression de l'air ambiant aussi.

Comme la durée du cycle est extrêmement sensible à ces paramètres, elle peut fluctuer : trois cycles successifs peuvent par exemple durer respectivement 101, 102 et 132 s.

- Variabilité à long terme : la durée du cycle dépend de la vitesse de montée du liquide coloré, donc du taux d'évaporation de l'eau :
 - Par un beau jour d'été, si la fenêtre est ouverte, la durée moyenne est de 67 s.
 - Si l'on ferme la fenêtre, la durée moyenne passe à 147 s !

- Même écart si un nuage vient à passer devant le Soleil. Un jour où le temps est nuageux, fenêtre fermée, la durée moyenne peut atteindre près de 180 s.
- La nuit aussi, la durée augmente.
- Dans une salle de bain, à cause de l'humidité, la durée augmente. Si on ferme la porte et qu'on prend un bain, il n'y a plus d'évaporation, et le cycle s'arrête.

Notes

- À chaque cycle, la feutrine s'imbibe de la même quantité d'eau. Or cette eau n'arrive pas entièrement à s'évaporer. Le surplus s'écoule alors le long du corps de l'oiseau et tombe goutte-à-goutte à ses pieds. On recueille typiquement une goutte toutes les six minutes : soit quelques $10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, c'est-à-dire une valeur comparable à la consommation totale \dot{V} (équation (336)). Autrement dit, en fait, l'essentiel de l'eau consommée est perdue, ce qui explique la mauvaise efficacité de l'oiseau.
- Une autre cause de l'inefficacité est que, quand l'eau s'évapore, une grosse partie de la chaleur nécessaire provient directement de l'atmosphère, sans utilité, et non du gaz contenu dans la tête.
- Si le bec ne trempe plus dans l'eau, l'oiseau continue son cycle de plus en plus lentement, pendant plusieurs heures, tant que la feutrine est assez mouillée.
- Si vous disposez d'un rétroprojecteur, vous pouvez poser l'oiseau et le verre dessus. Non seulement cela permet de projeter le tout sur écran (pensez à prendre un verre à fond plat et transparent) ; mais en plus la chaleur de la lampe accélère le cycle.

Ouvertures.

- Pourriez-vous estimer la température de la tête de l'oiseau, qui permette d'expliquer la montée du liquide coloré ? Montrez que ce liquide est probablement volatil (c'est vraisemblablement du dichlorométhane avec un colorant) : il s'évapore et se condense, alternativement, échangeant de la chaleur latente sans modifier beaucoup sa température. Comparez avec le cycle décrit par un fluide caloporteur, voir page 148.
- L'évaporation naturelle, et la consommation de l'oiseau, sont chacune responsables d'une même baisse de niveau. Celle-ci est très variable (voir page 261), mais prenons l'exemple de $z = 5 \text{ mm}$ en quatre jours (équation (336)). On peut alors évaluer le taux d'évaporation naturel de l'eau, par unité de surface :

$$\dot{z} = \frac{\dot{V}}{S} = \frac{0,5 \text{ cm}}{100 \text{ h}} = 1,4 \cdot 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (340)$$

En comparant avec l'équation (336), déduisez-en alors la surface réelle de la feutrine : c'est-à-dire la surface offerte aux échanges avec l'air, compte tenu de toutes les anfractuosités de la feutrine. Vérifiez que cette surface réelle est supérieure à sa surface apparente (voir page 44). C'est tout l'intérêt de la feutrine : sa structure en fibres augmente considérablement la surface d'échange.

- Étendez votre lessive sur une corde à linge. À quelle vitesse sèche-t-elle ? Faites des mesures avec différents textiles, et avec différentes conditions météo : vitesse du vent, humidité de l'air, température ambiante, au soleil ou à l'ombre. Comparez avec le taux d'évaporation évalué ici (équation (340)), et avec sa variabilité (voir page 261).

Sources et références

- [1] F. GRANER. *Petits problèmes de physique – première partie*. Springer, Heidelberg, 1998. Exercice K.

Corrigé 28 L'insecte et les deux sons qu'il émet (Énoncé à la page 44)

► Question 28.1.

Analyse qualitative. La coccinelle descend sans accélérer. Si l'on fait un bilan global :

- Son énergie potentielle de pesanteur diminue.
- Son énergie cinétique reste constante en moyenne.
- Son énergie mécanique totale diminue donc, il ne s'agit pas d'un système conservatif. En effet, un choc de bois sur du bois est presque totalement inélastique. On peut le constater facilement en laissant tomber un crayon sur du parquet : l'énergie cinétique disparaît presque totalement au cours du choc.
- L'énergie mécanique dissipée se retrouve à la fin sous forme d'énergie interne de la table ou de l'atmosphère. L'un des mécanismes de cette échange de chaleur est l'émission de bruit (voir page 6).
- Au final, cela fait donc augmenter l'entropie de l'Univers.

Valeurs numériques. La seule quantité qu'il vous faut évaluer est la masse de la coccinelle. Avec une masse volumique de l'ordre de $900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (voir page 286), un diamètre de 9 cm et une épaisseur de 2 cm, la masse du corps est :

$$m \approx 900 \times \frac{\pi \times (9 \cdot 10^{-2})^2}{4} \times 2 \cdot 10^{-2} = 0,1 \text{ kg}.$$

En descendant de $h = 5,4 \text{ cm}$ la coccinelle a donc perdu une énergie potentielle :

$$\Delta E_{\text{pot}} = mgh = 6 \cdot 10^{-2} \text{ J}, \quad (341)$$

entièrement convertie sous forme de chaleur. L'entropie de l'Univers a augmenté de :

$$\Delta S = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{T_{\text{amb}}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

La puissance moyenne de la coccinelle et son taux de production d'entropie moyen sont donc respectivement :

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta E_{\text{pot}}}{\Delta t} = \frac{6 \cdot 10^{-2} \text{ J}}{12 \text{ s}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ W},$$

$$\langle \dot{S} \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 10^{-4} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}}{12 \text{ s}} = 17 \cdot 10^{-6} \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}. \quad (342)$$

Comme on pouvait s'y attendre, ces nombres sont très petits. Pensez qu'une petite ampoule de lampe de poche est de l'ordre de quelques watts, soit mille fois plus (voir page 288).

► Question 28.2.

Analyse qualitative. La coccinelle n'a pas de source d'énergie propre. Elle consomme son énergie potentielle, qui entretient ses oscillations. Quand la coccinelle arrive au bas du plan incliné, sur la table, elle s'arrête.

À chaque choc toute l'énergie cinétique est dissipée. Deux instants où la coccinelle fait « clic » (voir la figure 92) sont donc deux états rigoureusement identiques de la coccinelle ; la seule différence est l'énergie potentielle de pesanteur perdue (voir aussi l'exercice 4.3). L'oscillation est donc périodique, sans accélération.

Il s'agit ici d'oscillations de relaxation : le système alterne entre deux états extrêmes non stables, en consommant de l'énergie ; c'est comme dans l'oiseau buveur (exercice 27) ou l'oiseau pic-pic [1]. Ici, les deux positions extrêmes correspondent aux deux butées que rencontre la patte arrière : quand la coccinelle est bloquée vers

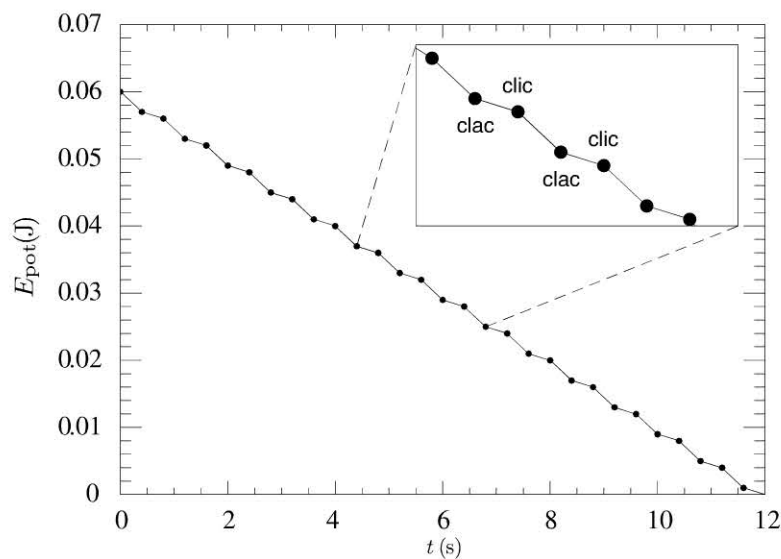


Figure 92 Allure de l'énergie potentielle de pesanteur de la coccinelle en fonction du temps.

Les points noirs indiquent les chocs. L'axe des ordonnées est calculé par l'équation (341).

Insert : agrandissement de trois périodes.

l'arrière, le moment du poids la ramène vers l'avant ; quand elle est bloquée vers l'avant, le moment du poids la ramène vers l'arrière (voir « Notes »).

► Question 28.3.

Analyse qualitative. Au cours de l'étape où elle bouge en bloc, la coccinelle est un solide indéformable qui roule sans glisser. Le mouvement de ce solide combine deux difficultés :

- Son barycentre n'est pas confondu avec son centre de courbure : il équivaut donc à un pendule pesant, voir la référence [2].
- Ce solide roule sur un plan incliné.

Notations. On peut suggérer les notations indiquées sur la figure 93. Les trois points importants sont bien distincts :

- Le centre de courbure C est défini par la forme du dessous des pattes. Il reste fixe par rapport au corps de la coccinelle. La distance IC , qu'on notera R , vaut $R = IC = 10$ cm (voir page 46). Le point C est donc situé au-dessus de la coccinelle.
- Le barycentre G de la coccinelle est à peu près au centre du corps de la coccinelle. On peut mesurer sa position (voir page 9). On trouve que la distance CG , qu'on notera r , vaut environ $r = CG = 5$ cm.
- L'axe de rotation O de la patte arrière est un point matériel bien réel : en l'occurrence, c'est une petite tige de bois.

Dans l'étape où la patte arrière est bloquée, le point O ne joue aucun rôle. L'angle β varie, mais α reste fixe. Si l'on convient que tous les angles sont positifs sur le dessin de la figure 93, alors :

$$\alpha = \beta + \gamma. \quad (343)$$

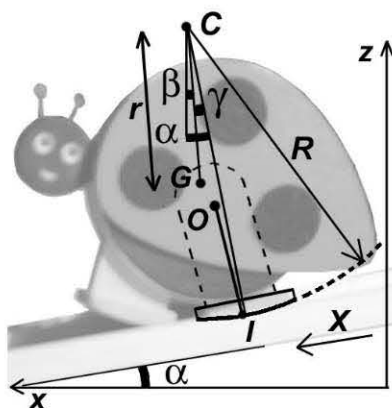


Figure 93 Notations utilisées pour décrire la coccinelle.
 α est l'angle du plan incliné avec l'horizontale, donc de CI avec la verticale.
 CG fait un angle β avec la verticale, et un angle γ avec CI .
 On convient que les angles dessinés ici sont positifs.

Mise en équations. Pour cette étape où la coccinelle roule sans glisser, et est indéformable, faut-il passer par l'énergie ou par les forces ? Combien y a-t-il de degrés de liberté ? Faut-il tenir compte des frottements ? Voyez les discussions page 8 :

- Il n'y a qu'un degré de liberté.
- Les frottements solides sont importants pour empêcher la coccinelle de glisser ; en revanche, ils ne dissipent pas d'énergie. Le système est donc conservatif.

Donc pas d'hésitation : écrivez l'expression de l'énergie. Ici, l'énergie mécanique E vaut :

$$\begin{aligned} E &= E_c + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} J_I \dot{\beta}^2 + mgz_G \\ &= \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \dot{\beta}^2 + mgz_G, \end{aligned} \quad (344)$$

où J_I et J_G sont les moments d'inertie de la coccinelle par rapport à l'axe y , pris respectivement en I et en G .

En écrivant que G est en rotation autour de I , on obtient v_G :

$$v_G^2 = \dot{\beta}^2 (IG)^2 = \dot{\beta}^2 [R^2 - 2Rr \cos \gamma + r^2]. \quad (345)$$

Enfin, pour calculer la cote de G , on peut procéder par étapes, en calculant la cote de I , puis celle de C :

$$z_G = z_I + [z_C - z_I] + [z_G - z_C].$$

Un peu de géométrie permet d'obtenir l'expression de chacun de ces trois termes, ce qui donne :

$$z_G = (\lambda - X \sin \alpha) + R \cos \alpha - r \cos \beta. \quad (346)$$

où λ est une constante.

Regroupement des équations. En regroupant les équations (343-346), on obtient l'expression développée de l'énergie mécanique :

$$\begin{aligned} E &= \frac{\dot{\beta}^2}{2} [m (R^2 - 2Rr \cos (\alpha - \beta) + r^2) + J_G] \\ &\quad + mg (-X \sin \alpha + R \cos \alpha - r \cos \beta). \end{aligned} \quad (347)$$

Le crochet de l'équation (347) représente J_I : il est homogène à une masse fois une longueur au carré. On peut donc définir la longueur $L(\beta)$, qui représente la distance moyenne des masses au point I , par :

$$L^2 = \frac{J_I}{m} = R^2 - 2Rr \cos (\alpha - \beta) + r^2 + \frac{J_G}{m}. \quad (348)$$

Cela permet d'écrire de façon plus légère la conservation de l'énergie mécanique (équation (347)) :

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2} L^2 \dot{\beta}^2 + g (-X \sin \alpha + R \cos \alpha - r \cos \beta) = \text{constante.} \quad (349)$$

L'équation (349) donne toute l'information sur le mouvement de la coccinelle. Cependant, cette équation de conservation de l'énergie n'est pas facile à intégrer telle quelle. C'est donc un exemple de cas où il est intéressant de la dériver par rapport au temps (voir page 7).

Pour la dériver, procédez par étapes :

- Rappelez-vous que α est fixe et β varie, voir page 265 :

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= 0, \\ \dot{\beta} &\neq 0. \end{aligned} \quad (350)$$

- Reliez \dot{X} à $\dot{\beta}$, en utilisant la condition de roulement sans glissement. Elle s'écrit (avec un signe négatif, car on a convenu $\beta > 0$, $\dot{\beta} < 0$) :

$$\dot{X} = -R\dot{\beta}. \quad (351)$$

- Calculez la dérivée de L^2 par rapport au temps en dérivant sa définition (équation (348)) :

$$2L\dot{L} = 2Rr\dot{\beta} \sin(\beta - \alpha). \quad (352)$$

En regroupant les équations (350-352), on obtient finalement l'équation d'évolution de β :

$$L^2 \ddot{\beta} + Rr\dot{\beta}^2 \sin(\beta - \alpha) + g(R \sin \alpha + r \sin \beta) = 0. \quad (353)$$

Commentaires. Pour comprendre cette équation, on pourrait procéder à une approximation physique (voir page 4) : en écrivant $L \approx \text{constante}$, donc en négligeant $2L\dot{L}$, on pourrait provisoirement oublier le terme non-linéaire en $\dot{\beta}^2$. En introduisant les notations :

$$a = g \sin \alpha \frac{R}{L^2}, \quad \omega^2 = g \frac{r}{L^2}, \quad (354)$$

l'équation (353) se réécrirait alors :

$$\ddot{\beta} \approx -(a + \omega^2 \sin \beta). \quad (355)$$

Vérifications.

- L'homogénéité de l'équation (353) est visible depuis qu'on a introduit L (équation (348)). En effet, tous les termes sont en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. De même, tous les termes de l'équation (355) sont en s^{-2} .
- Le signe est correct puisque sur la figure, α et β sont positifs. Le moment du poids tend à faire accélérer la coccinelle, donc $\ddot{\beta}$ est de plus en plus négatif : $\ddot{\beta} < 0$.
- On peut vérifier le comportement de l'équation (355), car on retrouve les deux cas limites attendus (voir page 265) :
 - Si $\alpha = 0$ (donc $a = 0$), on trouve $\ddot{\beta} = -\omega^2 \sin \beta$. C'est un pendule pesant, de pulsation ω .
 - Si $r = 0$ (donc $\omega = 0$), on trouve $\ddot{\beta} = -a = \text{constante}$. C'est un cylindre avec une accélération angulaire $-a$ constante, due à l'inclinaison du plan sur lequel il roule.

Valeurs numériques.

- Puisque $R = 10 \text{ cm} \approx 2r$ (voir page 265), on obtient :

$$IG \approx r = 5 \text{ cm}.$$

- Pour un cylindre, $J_G/m \approx (IG)^2/2$. On en déduit (équation (348)) : $L^2 \approx r^2 + r^2/2 = 3r^2/2$, soit :

$$L \approx \sqrt{\frac{3}{2}} r = 6,1 \text{ cm}.$$

- La pulsation ω du pendule pesant et l'accélération angulaire a du cylindre (équation (354)) sont donc respectivement :

$$a \approx g \sin \alpha \frac{4}{3r} = 40 \text{ s}^{-2},$$

$$\omega^2 \approx g \frac{2}{3r} = 1,3 \cdot 10^2 \text{ s}^{-2}. \quad (356)$$

Notes. Quand on dispose d'une telle coccinelle, on peut l'étudier plus en détail. On constate ainsi que sa période se décompose en quatre étapes :

- (1) L'étape décrite ci-dessus : la coccinelle est en appui sur sa patte avant. La patte arrière est bloquée contre la patte avant, donc toute la coccinelle tourne en bloc autour du point I (roulement sans glissement). Le moment du poids la ramène vers l'arrière. Elle fait une demie oscillation. Cette étape se termine au moment où la coccinelle prend appui sur la patte arrière.

- (2) À ce moment, son axe de rotation devient désormais l'axe O de la patte arrière. C'est cela qui permet au reste du corps d'avancer. Les deux pattes s'écartent l'une de l'autre. Cette étape se termine quand la patte arrière arrive en butée, en faisant « clac ».
- (3) Si la pente du plan incliné est suffisante, le moment du poids fait tourner la coccinelle en bloc et la ramène vers l'avant. Cette étape se termine lorsque la patte avant touche le plan incliné.
- (4) La coccinelle prend alors appui sur la patte avant. La patte arrière est libre de tourner et vient se cogner sur la patte avant. Contrairement à la deuxième étape, il n'y a que la patte arrière qui tourne, donc l'inertie est plus faible et le bruit qu'on entend est moins fort, plus aigu : « clic ».

Ouvertures. Les montres-bracelets mécaniques font « tic-tac » : elles contiennent un ingénieux dispositif, appelé « l'échappement ». À chaque choc, l'échappement dissipe son énergie ; il se retrouve donc périodiquement dans le même état. C'est l'échappement qui permet à la montre d'avoir une période constante. Comparez l'échappement et la coccinelle :

- Du point de vue de la thermodynamique, le bilan est toujours le même. En régime permanent, il y a une source d'énergie qui entretient les oscillations ; à leur tour les oscillations dissipent de l'énergie :
 - Dans le cas de la montre-bracelet, on cherche à minimiser la dissipation : à la fois pour augmenter l'autonomie de la montre, et aussi parce que le bruit du « tic-tac » est gênant.
 - Au contraire, dans la coccinelle, le « clic-clac » fait partie du jeu. De même, dans un métronome mécanique, on cherche à mettre en valeur le « toc-toc ».
- La source d'énergie qui entretient des oscillations est :
 - Une énergie potentielle de pesanteur : pour la coccinelle, mais aussi pour les horloges dont on remonte les poids.
 - Une énergie potentielle élastique : pour les montres-bracelets mécaniques, pour les métronomes mécaniques, ou les petites pendules à ressort.

À noter qu'il existe d'autres exemples de source d'énergie qui entretient des oscillations, par exemple sous forme d'énergie de liaison des molécules d'eau, pour l'oiseau buveur (exercice 27). Ou encore, les molécules biologiques qui fournissent l'effort de nos cellules consomment l'énergie libérée lors d'une réaction chimique (en l'occurrence, libérée par l'hydrolyse de l'adénosine triphosphate). Parmi ces « moteurs moléculaires », il y en a de toutes sortes, qui produisent un mouvement de translation ou de rotation par eux-mêmes, sans l'influence d'aucun champ de force extérieur. Certains, analogues à la coccinelle, progressent alternativement « sur deux pattes » [3].

Sources et références

- [1] F. GRANER. *Petits problèmes de physique – première partie*. Springer, Heidelberg, 1998, Exercice K.
- [2] F. GRANER. *Petits problèmes de physique – première partie*. Springer, Heidelberg, 1998, Exercice 22.
- [3] M.B. FISCHER et A.B. KOLOMEISKY. The Force exerted by a Molecular Motor. *Proceedings of the National Academy of Sciences (USA)*, volume 96, 1999, pages 6597-6602.

Corrigé 29 Soyez précis avec le vent (Énoncé à la page 46)

► Question 29.1.

Analyse qualitative. En pratique, on détermine un diagramme de vitesse instantanée en observant des bateaux qui naviguent dans une brise régulière. On peut en tracer l'allure qualitativement (figure 94), sans entrer dans les détails (voir « Notes »).

- **Forme** : d'une part, il y a un secteur angulaire inefficace (vitesse nulle) dans la direction d'où vient le vent. D'autre part, la poussée est maximale quand on est dos au vent, mais la portance est maximale par vent latéral, donc au total il y a un maximum sur le côté. Quand on est dos au vent il y a un minimum local de la vitesse instantanée, peu marqué. Finalement, le diagramme polaire a une forme qui ressemble à une pomme, un shaddock, ou un pacman.
- **Orientation** : son orientation est donnée par la direction du vent, donc si le vent tourne, cette pomme tourne aussi.
- **Taille** : la vitesse instantanée du bateau est fonction de celle du vent : en gros, dans une direction donnée, le module v de la vitesse instantanée du bateau est proportionnelle à u ; donc si le vent faiblit (u diminue), la pomme rétrécit.

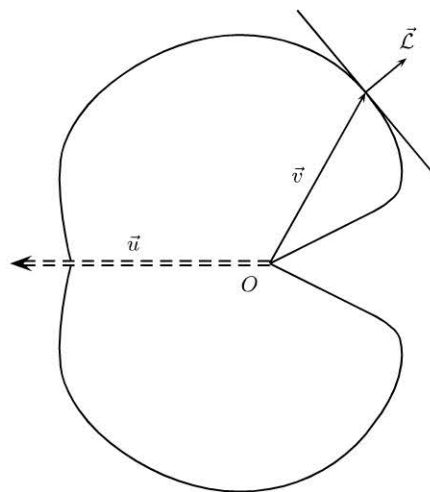


Figure 94 Allure schématique du diagramme de vitesse instantanée.

La vitesse du vent est \vec{u} . En représentation polaire, en partant de l'origine O , on trace le module $v(\theta)$ de la vitesse instantanée \vec{v} du bateau en fonction de sa direction θ . La normale à la courbe $v(\theta)$ indique la direction de la vitesse \vec{L} .

► Question 29.2.

Mise en équations. La durée est un scalaire, qui s'exprime en secondes. On peut la noter $D(\vec{r}_0, \vec{r})$. Elle a des propriétés intéressantes (voir « Ouvertures »). Son gradient (par rapport à \vec{r}) est :

$$\vec{\mathcal{L}}(\vec{r}) = \vec{\nabla} D(\vec{r}_0, \vec{r}).$$

C'est un vecteur, indépendant de \vec{r}_0 , qui s'exprime en $s \cdot m^{-1}$. Dimensionnellement, $\vec{\mathcal{L}}$ est donc l'inverse d'une vitesse. Si toutes les vitesses doublent, D est divisé par deux, donc $\vec{\mathcal{L}}$ aussi. D'où son nom : la lenteur.

Quand on fait une course, on cherche à aller le plus vite possible d'un point A à un point B , donc la quantité qu'on cherche à minimiser est la durée totale :

$$D(A, B) = \int_A^B \vec{\mathcal{L}}(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (357)$$

► Question 29.3.

Graphique. L'ensemble des points qu'on peut atteindre en une durée D , en partant de \vec{r}_0 , peut s'appeler « ligne d'équidurée ». Puisque la lenteur est le gradient de la durée, elle est perpendiculaire à cette ligne, orientée vers l'extérieur (vers les durées croissantes).

Quelle allure a la ligne d'équidurée ? Pour la tracer, il faudrait prendre de nombreux bateaux, les grouper tous au point \vec{r}_0 , et leur assigner à tous une direction θ différente ; on les lâcherait tous en même temps pour les faire partir droit devant eux, chacun gardant son θ fixé. Au final, après un temps D , chacun aurait parcouru une distance $v(\theta)D$; donc ils se répartiraient sur une ligne qui aurait la même forme de pomme que le diagramme de vitesse instantanée (voir la figure 94).

En conséquence, sur la figure 94, on peut lire la direction de \vec{v} suivant θ , et la direction de $\vec{\mathcal{L}}$ selon la normale à la courbe. Elles sont toutes les deux orientées vers l'extérieur. Elles n'ont aucune raison d'être parallèles (puisque le diagramme n'est pas un cercle). Rappelons que \vec{v} et $\vec{\mathcal{L}}$ n'ont pas la même dimension, donc on ne peut pas les tracer sur la même figure. Par conséquent, la figure 94 ne renseigne que sur la direction de $\vec{\mathcal{L}}$, pas sur son module.

Mise en équations et résolution. Que peut-on dire sur le module de $\vec{\mathcal{L}}$? Autrement dit, en utilisant les définitions de la lenteur et de la vitesse instantanée, comment pouvez-vous les relier ? Ce sont des vecteurs, donc il n'est pas question de diviser l'un par l'autre ; il faut travailler proprement en revenant à leurs définitions.

Considérez donc une durée T , et un point \vec{r} sur la ligne équidurée correspondante : autrement dit, on peut atteindre le point \vec{r} en une durée $D(\vec{r}) = T$. Comme

on cherche à caractériser le gradient de T , il faut faire intervenir un temps infinitésimal dT . Considérez donc la trajectoire qui passe par \vec{r} , et suivez-la pendant dT (figure 95). Vous aboutissez ainsi en un point $\vec{r} + d\vec{r}$ situé sur la ligne équipotentielle $D(\vec{r} + d\vec{r}) = T + dT$. Écrivez la définition de \vec{v} :

$$d\vec{r} = \vec{v} dT, \quad (358)$$

puis celle de $\vec{\mathcal{L}}$:

$$dT = D(\vec{r} + d\vec{r}) - D(\vec{r}) = \vec{\nabla} D \cdot d\vec{r} = \vec{\mathcal{L}} \cdot d\vec{r}. \quad (359)$$

En regroupant ces deux équations (358) et (359), on obtient, quel que soit dT :

$$dT = \vec{\mathcal{L}} \cdot d\vec{r} = \vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{v} dT,$$

d'où finalement la relation demandée :

$$\vec{\mathcal{L}} \cdot \vec{v} = 1. \quad (360)$$

Si l'on connaît la vitesse instantanée \vec{v} , on connaît l'orientation de $\vec{\mathcal{L}}$ par la figure 94, et on en déduit alors son module par l'équation (360), donc on connaît entièrement $\vec{\mathcal{L}}$ en fonction de \vec{v} .

► Question 29.4.

Commentaire. Revenez maintenant à la stratégie. Il s'agit de minimiser la durée, donc l'intégrale de $\vec{\mathcal{L}}$. Ici, restreignez-vous uniquement au cas où le vent est constant dans l'espace et dans le temps. Auquel cas, le problème est le suivant.

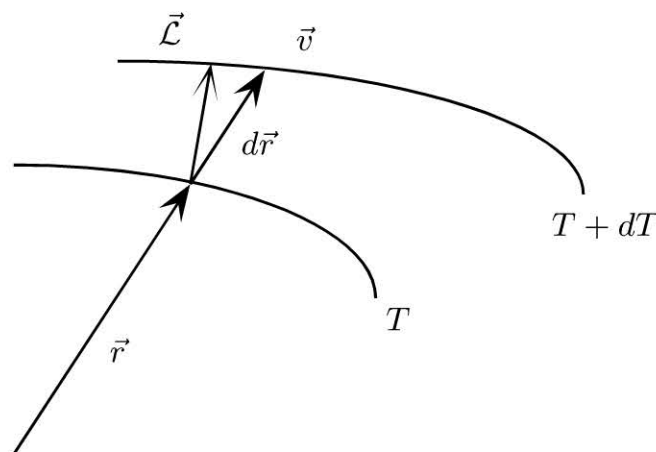


Figure 95 Démonstration de la relation entre la vitesse \vec{v} et la lenteur $\vec{\mathcal{L}}$ (équation (360)).

Connaissant le point de départ A et le point d'arrivée B , on cherche à minimiser $\vec{L} \cdot \vec{AB}$ (équation (357)). C'est la direction de \vec{L} qui compte, et non celle de \vec{v} . On doit donc résoudre le problème inverse de la question précédente : connaissant le \vec{L} qu'on désire, comment déterminer \vec{v} , c'est-à-dire comment choisir son cap ?

- On considère la direction de \vec{L} , et l'on cherche sur la figure 94 en quel point la tangente au diagramme est perpendiculaire à \vec{L} . Dans la plupart des cas, la solution est unique. On choisit alors d'orienter le bateau dans la direction θ correspondante, qui est presque la direction où l'on veut aller, mais pas exactement !
- Dans le cas particulier où l'on veut remonter face au vent, il y a deux solutions (voir la figure 96). Aucune des deux n'est très attirante, puisqu'il faut orienter le bateau dans une direction qui est cette fois franchement différente de celle où l'on veut aller. Laquelle choisit-on : \vec{v}_1 ou \vec{v}_2 ? Les deux, successivement ; on fait un zig-zag, en prenant l'une, puis l'autre.
- Quand on a le vent dans le dos, le diagramme de vitesse a également une petite concavité, moins marquée. Ici encore, on a le choix entre deux directions de vitesse symétriques, que l'on peut prendre alternativement.
- Quand deux bateaux sont côte-à-côte et avancent à la même vitesse, il faut se méfier des apparences. Celui qui est en tête, c'est-à-dire celui qui passera le premier la ligne d'arrivée, ce n'est pas nécessairement celui qui est en avant dans la direction de leur vitesse instantanée ; c'est celui qui est en avant dans la direction de leur lenteur !

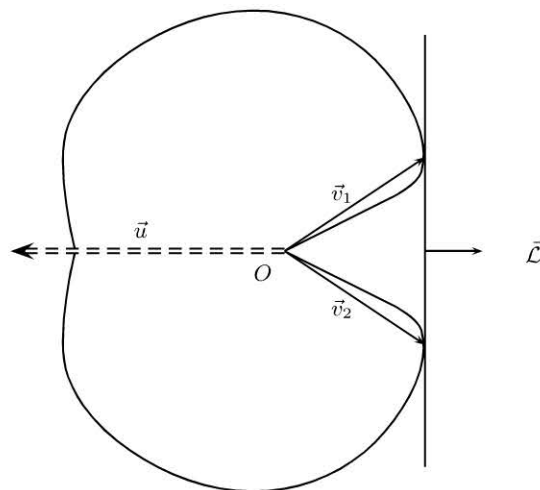


Figure 96

Pour une vitesse instantanée donnée, la lenteur est connue de façon unique (question 29.3).

En revanche, quand on connaît la lenteur, il peut arriver qu'elle corresponde à deux vitesses instantanées différentes (question 29.4). Cela se voit graphiquement, là où le diagramme de vitesse instantanée est concave. Tandis que la vitesse instantanée est représentée par un diagramme en forme de pomme, la vitesse moyenne est représentée par son enveloppe convexe.

► Question 29.5.

Analyse qualitative. La stratégie générale consiste à faire un compromis entre deux contraintes :

- Pour atteindre son but en un temps minimal, le marin a intérêt à ce que sa lenteur $\tilde{\mathcal{L}}$ soit toujours à peu près dirigée vers son but. Si la direction du vent varie, il doit en permanence réajuster son cap en conséquence. En particulier, il doit tirer des bords (passer de \vec{v}_1 à \vec{v}_2 , voir la figure 96) à chaque fois que le vent vient dans la direction de son but.
- Pour que le module de sa vitesse instantanée soit le plus grand possible, il a intérêt à être toujours à un endroit où la vitesse du vent est grande, et à éviter les endroits calmes. Cela impose parfois de cesser de se diriger vers son but, pour faire un détour par des régions plus venteuses.

En général, la vitesse du vent varie dans le temps et dépend aussi de l'endroit où l'on est. Trouver la meilleure stratégie est un problème inextricable, et le savoir-faire empirique des marins est nécessaire, même si certains se font assister d'un ordinateur (voir « **Ouvertures** »). La navigation reste une science intuitive et non exacte, ce qui fait son charme.

► Question 29.6.

Commentaire. On peut faire une analogie avec l'optique dans un milieu non dispersif. La lenteur est l'analogue de l'indice optique, qui est un scalaire si le milieu est isotrope. Elle augmente là où les lignes équidurées se resserrent, elle diminue là où les lignes sont loin les unes des autres.

La trajectoire optimale du bateau correspond à un rayon lumineux, dans un milieu d'indice hétérogène. La recherche du temps minimum correspond au principe de Fermat, la ligne équidurée correspond au front d'onde de Malus, et la manière pratique de la tracer (29.3) représente le principe d'Huygens. La vitesse instantanée correspond au vecteur d'onde.

Notez quelques petites différences entre le bateau et l'optique. Pour le bateau, la vitesse instantanée dépend de la direction, de la position, du temps. En optique, la vitesse dépend de la longueur d'onde (dispersion).

L'analogie est extrêmement profonde et s'étend à d'autres problèmes d'optimisation. Elle a été développée par Hamilton, dont le but était d'unifier la physique. Il a écrit exactement les mêmes équations : pour la lenteur ; pour l'optique ; et pour la quantité de mouvement d'une particule dans un potentiel en mécanique classique [1].

Notes.

- En réalité, le diagramme de vitesse instantanée est plus compliqué que le schéma de la figure 94. Il faut tenir compte de nombreux autres phénomènes, en particulier la vitesse du courant dans l'eau.

- L'article [1] présente à la fois les équations générales de la navigation, identiques à celles de l'optique géométrique, et quelques exemples précis de navigation. Il explique en particulier comment on construit proprement les lignes d'équidurée, analogues des fronts d'onde en optique.
- En suivant l'article [1], on a utilisé ici la méthode due à Hamilton : elle consiste à minimiser une fonction de l'espace, équation (357). De façon équivalente, on aurait pu utiliser la méthode de Lagrange, en minimisant une fonction du temps, par exemple le temps t tel que $\int_0^t \vec{v}(t') dt' = \overrightarrow{AB}$. Le « multiplicateur de Lagrange » qu'on devrait alors introduire est exactement égal à la fonction lenteur qu'on a introduite ici.

Ouvertures.

- La fonction durée peut aussi décrire votre temps de trajet en transports en commun. Essayez par exemple d'estimer l'ensemble des points de la Terre que vous pouvez atteindre de chez vous en une heure, ou bien en dix heures.
- À quelle condition la fonction durée $D(A, B)$ est-elle une distance mathématique ? Autrement dit, dans quels cas vérifie-t-on à la fois $D(A, A) = 0$, $D(A, B) = D(B, A)$ et $D(A, C) \leq D(A, B) + D(B, C)$? Examinez en particulier la question de la réversibilité, $D(A, B) = D(B, A)$, dans l'exemple de la navigation à voile, ou des transports en commun.

Sources et références

- [1] J.-C. KIMBALL et H. STORY. Fermat's Principle, Huygens' Principle, Hamilton's Optics and Sailing Strategy. *European Journal of Physics*, volume 19, 1998, pages 15-24.

Corrigé 30 La mousse étalée (Énoncé à la page 48)

Notations. On numérote les bulles par $i = 1, \dots, N_{\text{bulles}}$. Chaque bulle a un nombre de voisines n_i , un nombre de sommets qui vaut également n_i , une aire A_i , une pression P_i . Si les bulles i, j ont une paroi commune, on note l_{ij} sa longueur et κ_{ij} sa courbure (dont on discutera le signe à la question 30.4).

► Question 30.1.

Mise en équations. Les deux formulations possibles doivent être équivalentes. On peut écrire : soit que la somme des forces s'exerçant sur le sommet est nulle ; soit que l'énergie, donc la somme des longueurs, est extrémale.

- Comme on veut ici un résultat local, concernant ici le sommet et son voisinage immédiat, il est en fait plus rapide d'écrire les forces. Si chaque paroi tire avec

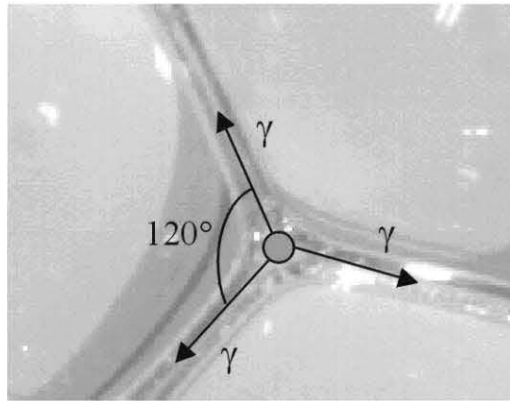


Figure 97 En chaque sommet, trois parois se rencontrent : leurs tangentes font des angles de $120^\circ = 2\pi/3$.

une tension $\vec{\gamma}$ dirigée selon sa tangente, on a trois vecteurs de même norme dont la somme est nulle (voir figure 97) : la condition nécessaire et suffisante est qu'ils fassent des angles de $2\pi/3$. Cela se démontre en projetant cette relation vectorielle sur la direction de l'un ou l'autre de ces vecteurs.

- Pour écrire que $E = \gamma \sum l$ passe par un extremum, il faut imaginer que le sommet opère un petit déplacement $d\vec{r}$. La contribution des trois parois à l'énergie est $\gamma(l_{12} + l_{23} + l_{31})$: elle est modifiée de $dE = \gamma(dl_{12} + dl_{23} + dl_{31})$. Mais comment peut-on relier dl , qui est un scalaire, avec le vecteur $d\vec{r} = d\vec{l}$? Une seule solution : revenir à la définition de la norme de l , c'est-à-dire : $l^2 = \vec{l} \cdot \vec{l}$. En différenciant, on obtient $2l dl = 2\vec{l} \cdot d\vec{l}$, donc la relation qu'on cherchait : $dl = \vec{l} \cdot d\vec{l} / l = \hat{e} \cdot d\vec{l}$, où \hat{e} est le vecteur unitaire tangent à la paroi (attention : la démonstration rigoureuse serait un peu plus difficile, voir « Notes »). En rassemblant, on obtient alors :

$$dE = \gamma \hat{e}_{12} \cdot d\vec{r} + \gamma \hat{e}_{23} \cdot d\vec{r} + \gamma \hat{e}_{31} \cdot d\vec{r}.$$

E est extrémale si $dE = 0$ quel que soit $d\vec{r}$: on retrouve la condition que la somme des trois forces $\gamma \hat{e}$ est nulle, autrement dit :

$$\hat{e}_{12} + \hat{e}_{23} + \hat{e}_{31} = \vec{0}.$$

Conclusion : ces trois vecteurs unitaires font entre eux des angles de 120° .

Commentaire. Si quatre parois se rencontrent au même sommet, peuvent-elles être à l'équilibre ? On pourrait imaginer que oui. Cependant, si ce « sommet à quatre parois » se sépare en deux sommets normaux, la longueur totale diminue (voir « Ouvertures »). Donc l'équilibre du « sommet à quatre parois » est toujours insta-

ble, et dans une mousse de savon il ne dure qu'une fraction de seconde. Ici encore, cette observation expérimentale se comprend intuitivement, mais elle est difficile à démontrer de façon rigoureuse (voir « Notes »).

► Question 30.2.

Mise en équations. On ne demande pas ici de démontrer la relation d'Euler (équation (2)). En revanche, il est facile (et conseillé) de faire quelques dessins, en ajoutant ou en supprimant une bulle, et de constater comment varient N_{parois} et N_{sommets} . La relation d'Euler donne immédiatement, pour une mousse à grand nombre de bulles :

$$N_{\text{bulles}} \gg 1 : \quad \frac{N_{\text{parois}}}{N_{\text{bulles}}} - \frac{N_{\text{sommets}}}{N_{\text{bulles}}} \rightarrow 1. \quad (361)$$

Comment peut-on estimer $N_{\text{parois}}/N_{\text{bulles}}$ et $N_{\text{sommets}}/N_{\text{bulles}}$?

- Pour N_{parois}/N , on aurait envie d'écrire que c'est le nombre moyen de voisines, c'est-à-dire justement le nombre \bar{n} qu'on cherche. Mais attention : si l'on fait ça, on compte deux fois chaque paroi, puisqu'elle est commune à deux bulles. Faites un dessin rapide pour le vérifier, on voit facilement que :

$$\lim_{N_{\text{bulles}} \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{parois}}}{N_{\text{bulles}}} = \frac{\bar{n}}{2}.$$

- Pour N_{sommets}/N , le raisonnement est similaire. On aimerait écrire que cela vaut \bar{n} , puisque le nombre de sommets par bulle est le même que le nombre de voisines par bulle. Mais attention ! chaque sommet est commun à trois bulles, donc :

$$\lim_{N_{\text{bulles}} \rightarrow \infty} \frac{N_{\text{sommets}}}{N_{\text{bulles}}} = \frac{\bar{n}}{3}.$$

On réécrit donc l'équation (361), pour $N_{\text{bulles}} \gg 1$:

$$\frac{\bar{n}}{2} - \frac{\bar{n}}{3} \rightarrow 1, \quad (362)$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{N_{\text{bulles}} \rightarrow \infty} \bar{n} = 6. \quad (363)$$

Commentaire. C'est donc un résultat très général, valable non seulement pour les mousses, mais aussi plus généralement pour tout réseau tel que les parois se rencontrent trois par trois.

► Question 30.3.

Mise en équations. De combien tourne le vecteur tangent à la paroi, quand on le suit tout autour d'une bulle ? Il y a deux contributions (figure 98) :

- Contribution des parois : l'une des définitions de la courbure κ d'une paroi est que κ est la norme de $d\hat{t}/ds$, où \hat{t} est le vecteur tangent à la paroi, et ds l'abscisse curviligne le long de cette paroi. De façon équivalente, κds est l'angle entre $\hat{t}(s)$ et $\hat{t}(s + ds)$, c'est-à-dire l'angle dont tourne \hat{t} sur la longueur ds ; et $\int \kappa ds$ est l'angle total dont tourne une paroi. On additionne alors les contributions $\int \kappa ds$ des différentes parois de la bulle.
- Contribution des sommets : la bulle i a n_i sommets. À chaque sommet, l'angle intérieur entre deux parois est $2\pi/3$. Est-ce que ça veut dire que \hat{t} tourne de $2\pi/3$? Non, certainement pas ; c'est l'angle complémentaire, c'est-à-dire $\pi - 2\pi/3 = \pi/3$: on le voit sur la figure 98.

En regroupant toutes ces contributions, on peut écrire le théorème de Gauss, qui dit que la somme de tout ce qu'on a tourné vaut exactement 2π lorsqu'on est revenu à son point de départ, en tournant autour de la bulle i :

$$\int \kappa ds + n_i \frac{\pi}{3} = 2\pi. \quad (364)$$

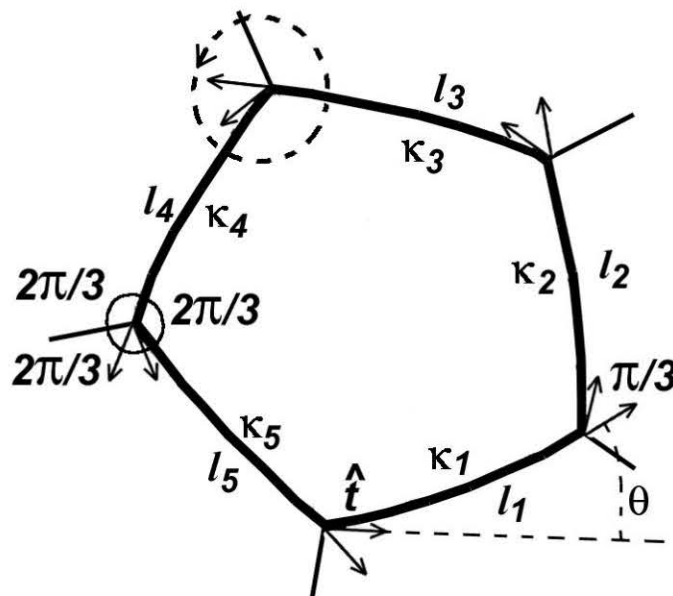


Figure 98 Illustration du théorème de Gauss, en deux dimensions.

Lorsqu'on parcourt le tour d'une bulle, le vecteur tangent \hat{t} change de direction : il tourne le long des parois courbées, et il tourne aussi de $+\pi/3$ à chaque sommet. Au total, si l'on revient à son point de départ après un circuit fermé, \hat{t} a tourné de 2π .

On peut le réécrire sous la forme :

$$\int \kappa ds = (6 - n_i) \frac{\pi}{3}. \quad (365)$$

Commentaire. On voit que si n_i est plus petit que six, l'intégrale de la courbure est strictement positive : par exemple, une bulle à cinq voisines est convexe (voir la figure 98). En revanche, une bulle à sept ou huit voisines est plutôt concave. Quand une bulle a exactement six voisines, elle peut soit avoir toutes ses parois droites ; soit avoir des parois concaves et d'autres convexes, l'intégrale totale de la courbure étant nulle.

► Question 30.4.

Mise en équations. La loi de Laplace (équation (3)) s'écrit :

$$P_i - P_j = \gamma \kappa_{ij}. \quad (366)$$

Ici, nous l'admettrons (voir référence [1]). Nous n'insisterons pas non plus sur les questions d'unités (voir « Notes »). Contentons-nous de la discuter physiquement.

Commentaire. Physiquement, que signifie cette relation ? C'est une condition d'équilibre, qui reflète la compétition entre la tension de la paroi d'une part, la différence de pression d'autre part. $P_i - P_j$ est la force normale à la paroi (par unité de longueur). Si la paroi n'est pas tendue, ou si elle n'est pas courbée, elle ne peut pas exercer de force normale. En revanche, si elle est courbée et sous tension, elle tend à revenir vers une forme droite, donc à faire diminuer la courbure. C'est exactement ce qu'on observe par exemple pour une corde sous tension (la « corde vibrante de Melde »), où le rappel est exactement le produit de la tension par la courbure (voir page 176).

Comment trouver le signe ? Si la bulle i est convexe et la bulle j concave, la tension de la paroi tend à la ramener en place, donc à diminuer l'aire A_i de la bulle i et à augmenter l'aire A_j de la bulle j . Pour équilibrer cette tension, il faut donc que $P_i > P_j$. On compte donc κ_{ij} positivement lorsque la bulle i est convexe ; et l'on a donc $\kappa_{ji} = -\kappa_{ij}$. Pour se souvenir du signe, on peut s'imaginer en train de gonfler ses joues, ou de gonfler un ballon de baudruche : il faut une surpression à l'intérieur.

Comment alors prouver que toute paroi est un arc de cercle ? Facile, car la différence de pression $P_i - P_j$ est la même en tout point de la paroi ij : si l'on écrit l'équation (366), on constate que le long de la paroi la courbure κ_{ij} est constante.

Que peut-on dire sur trois parois qui se rencontrent au même sommet ? Eh bien, l'équation (366) implique que la somme de leurs courbures est :

$$\begin{aligned}\kappa_{12} + \kappa_{23} + \kappa_{31} &= \frac{P_2 - P_1}{\gamma} + \frac{P_3 - P_2}{\gamma} + \frac{P_1 - P_3}{\gamma} \\ &= 0.\end{aligned}\quad (367)$$

Ainsi, si l'on parcourt un circuit fermé (comme le cercle en pointillés sur la figure 98), la somme des courbures des parois qu'on croise est nulle. C'est encore vrai si l'on parcourt un circuit fermé qui passe par un plus grand nombre de bulles.

► Question 30.5.

Mise en équations. Puisqu'une paroi est un arc de cercle de courbure κ , dans l'équation (365) on peut remplacer $\int \kappa ds$ par l'expression plus simple κl : c'est bien l'angle dont tourne un arc de cercle de courbure κ et de longueur l (vérification : pensez par exemple à un cercle de rayon R ; avec une courbure $\kappa = 1/R$, et une longueur $l = 2\pi R$, le vecteur tangent tourne de $\kappa l = 2\pi$). On réécrit alors l'équation (365) sous la forme équivalente, qui sera plus pratique pour la suite :

$$\sum_j \kappa_{ij} l_{ij} = (6 - n_i) \frac{\pi}{3}, \quad (368)$$

où j est le numéro d'une bulle voisine de la bulle i . Par conséquent, pour la pression :

$$\frac{1}{\gamma} \sum_j (P_j - P_i) l_{ij} = \sum_j \kappa_{ij} l_{ij} = (6 - n_i) \frac{\pi}{3}. \quad (369)$$

Commentaire. Cette équation (369) est assez extraordinaire, quand on y pense. Le nombre de voisines, c'est-à-dire la topologie de la bulle (membre de droite) influence sa courbure, c'est-à-dire sa forme (membre du milieu), et même sa pression, c'est-à-dire les forces qui s'exercent dans la mousse (membre de gauche) ! En pratique, cela veut dire que si les parois ne sont pas à l'équilibre, elles bougent et la bulle change de forme, jusqu'à ce que finalement les courbures et les pressions satisfassent la condition d'équilibre (équation (369)). On constate au passage que les bulles à trois, quatre ou cinq voisines sont en surpression par rapport à leurs voisines, tandis que celles à grand nombre de voisines sont plutôt en dépression.

► Question 30.6.

Mise en équations. Si un peu de gaz peut passer d'une bulle à l'autre, la quantité de gaz contenue par la bulle i (et donc son aire) varie à cause du flux de gaz sur le

contour de la bulle : on l'écrira sous la forme $k \times (P_j - P_i)$ où k est une constante, et j une de ses voisines. Plus précisément, la variation de l'aire A_i de la bulle est l'intégrale de ce flux sur toute la région qui permet les échanges avec ses voisines, donc sur ses parois :

$$\frac{dA_i}{dt} = - \sum_j \int k(P_j - P_i) ds = -k \sum_j (P_j - P_i) l_{ij}.$$

Attention au signe : si le flux est positif, l'aire diminue. Avec l'équation (369) on obtient :

$$\frac{dA_i}{dt} = k\gamma(n_i - 6) \frac{\pi}{3}. \quad (370)$$

Commentaire. Ici encore, c'est le nombre de voisines qui pilote tout ! Les bulles à trois, quatre ou cinq voisines, qui sont en surpression, se vident peu à peu au profit des autres.

Elles vont rapetisser, et perdre de plus en plus de voisines, donc rapetisser de plus en plus vite, pour finalement disparaître. Le nombre de bulles diminue donc. Comme en moyenne les bulles ont $\bar{n} = 6$ voisines (équation (363)), il y a toujours des bulles qui grandissent et d'autres qui rapetissent. La plupart du temps, l'aire moyenne des bulles est constante (ce qu'on vérifie en prenant la moyenne de l'équation (370) : $\bar{n} = 6$ donc $d\bar{A}/dt = 0$). En revanche, à chaque fois qu'une bulle disparaît, cela fait augmenter l'aire moyenne des bulles restantes ($d\bar{A}/dt > 0$). Il y a de moins en moins de bulles, qui sont de plus en plus grosses. C'est ce qu'on appelle le vieillissement de la mousse.

Au fait, comment est-ce qu'un peu de gaz peut passer d'une bulle à l'autre ? Si le gaz peut se dissoudre dans le liquide de la paroi, il y a des échanges entre la paroi et les bulles, et une molécule de gaz peut fort bien ressortir de l'autre côté de la paroi. La constante k de l'équation (370) dépend donc essentiellement de la solubilité du gaz dans le liquide. Ainsi, le CO_2 , très soluble, donne des mousses qui vieillissent vite : soda, champagne, la plupart des bières. Au contraire, les mousses de savon dans l'évier sont pleines d'air, donc en particulier d'azote, et durent bien plus longtemps. Sur ce principe, certaines bières pression du Nord de l'Angleterre, dites « à gaz mixtes », forment des mousses de grande longévité en incorporant de l'air lors du tirage, grâce à une pompe à main ; une brasserie irlandaise a industrialisé cette idée en utilisant un mélange de 70 % d'azote et 30 % de CO_2 .

Notes.

- En pratique, quand peut-on dire qu'une mousse est à deux dimensions ? Il faut que son épaisseur h soit bien plus petite que la taille des bulles, \sqrt{A} . Ici, h est la distance entre les plaques de verre, qui vaut typiquement une fraction de millimètre.

- Attention aux unités de la loi de Laplace, équation (366). En trois dimensions, il n'y a pas de problème : P est une pression, en $\text{Pa} = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{J} \cdot \text{m}^{-3}$; γ est une tension de surface, soit une énergie par unité de surface des films de savon, qui s'exprime en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} = \text{J} \cdot \text{m}^{-2}$; κ est une courbure, en m^{-1} : donc l'équation (366) est bien homogène. En deux dimensions, c'est un peu plus délicat : P est une force par unité de ligne, en $\text{N} \cdot \text{m}^{-1} = \text{J} \cdot \text{m}^{-2}$, autrement dit une « pression à deux dimensions » : c'est la pression « trois dimensions » usuelle multipliée par l'épaisseur h de la mousse ; γ est une énergie par unité de longueur des parois, en $\text{N} = \text{J} \cdot \text{m}^{-1}$: c'est la tension de surface en trois dimensions usuelle, multipliée par l'épaisseur h de la mousse ; et κ est toujours une courbure, en m^{-1} .
- Est-ce que la différence de pression entre les bulles est grande ou petite devant la pression atmosphérique ? Pour répondre, il faut connaître l'ordre de grandeur de la tension de surface des films de savon : typiquement $10^{-2} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$. Avec des rayons de courbure des parois de l'ordre du centimètre, soit 10^{-2} m , soit une courbure de l'ordre de 10^2 m^{-1} , l'équation (366) donne l'ordre de grandeur des différences de pression : $10^{-2} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \times 10^2 \text{ m}^{-1}$, soit $1 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} = 1 \text{ Pa} = 10^{-5} \text{ atm}$. Autrement dit, toutes les bulles sont environ à la même pression P_{atm} , avec de toutes petites surpressions pour contrebalancer la tension des parois.
- Historiquement, il y a un gros décalage entre l'énoncé des lois ci-dessus et leur démonstration mathématique rigoureuse. Ainsi Laplace a énoncé sa loi (équation (366)) en 1805 ; la règle des 120° a été publiée par Plateau en 1873 ; von Neumann a déterminé en 1952 la relation entre topologie, courbure et pression (équation (369)) et sa conséquence sur le vieillissement de la mousse (équation (370)). Or les démonstrations sont difficiles : elles ont dû attendre les travaux d'Almgren et Taylor, dans les années 1970 [2].
- Dans le cas très particulier où toutes les bulles ont la même aire, le réseau hexagonal est une solution de toutes les équations qu'on a écrites jusqu'ici. Les bulles ont toutes six voisines, elles sont toutes à la même pression, leurs parois ont une courbure nulle, elles se rencontrent trois par trois en faisant des angles de 120° . Ce réseau n'est quasiment jamais rencontré dans une mousse réelle, et évoque plutôt le nid des abeilles. Il a une propriété supplémentaire : c'est la manière d'arranger les bulles (de même aire, rappelons-le) qui minimise le périmètre total. Ce fait était considéré comme évident (depuis l'Antiquité !) : or ce n'est qu'en 2001 que Hales en a publié la démonstration [3]. C'est un exemple frappant du décalage entre l'énoncé de la propriété et sa démonstration rigoureuse.
- Les mousses à trois dimensions sont moins simples. Les règles de Plateau deviennent : chaque arête est la rencontre de trois faces, avec des angles de 120° ; chaque sommet est le point de rencontre de quatre arêtes, avec des angles

d'environ $109,5^\circ$ (c'est l'angle « tétraédrique », celui qu'on retrouve dans les molécules de CH_4). Amusez-vous à les vérifier à l'oeil dans un bain moussant. La loi de Laplace et le théorème de Gauss existent aussi à trois dimensions ; cependant, comme ils font intervenir respectivement la courbure moyenne et la courbure gaussienne de la face, on ne peut pas les regrouper pour relier la pression et la topologie aussi simplement que dans l'équation (369).

Ouvertures. Les mousses à deux dimensions sont sources de nombreux problèmes qui sont difficiles à cause du grand nombre de bulles en présence. On peut proposer ainsi quelques autres faits des mousses :

- Problème de topologie : pavez le plan avec des bulles, telles qu'en chaque sommet il y a exactement z bulles qui se rencontrent, ni plus ni moins. Montrez que le nombre moyen de voisines des bulles, \bar{n} , vérifie non plus l'équation (362), mais sa généralisation :

$$\frac{1}{\bar{n}} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}. \quad (371)$$

Montrez que les seules solutions entières sont les couples $(n, z) = (3, 6), (4, 4)$ ou $(6, 3)$. Déduisez-en que les seules façons de paver le plan avec des bulles régulières, identiques, disposées en réseau périodique, sont les réseaux triangulaire, carré et nid d'abeille. Expliquez pourquoi l'équation (371) est symétrique en \bar{n} et z , en utilisant la notion de réseau « dual », c'est-à-dire le réseau constitué des centres des bulles, deux centres étant reliés si les bulles sont voisines. Plus généralement, si les sommets ont des z différents, montrez que la même relation se généralise à sa moyenne : $1/\bar{n} + 1/\bar{z} = 1/2$.

- Problème de géométrie : prenez quatre points disposés aux quatre coins d'un rectangle, de côtés a et b . Essayez de les relier par des films de savon de longueur minimale : vous avez plusieurs possibilités. Soit en utilisant trois films, qui suivent des côtés du rectangle. Soit avec quatre films qui suivent les diagonales, et se rejoignent en un « sommet à quatre parois » au milieu du rectangle. Soit avec cinq films, qui constituent deux sommets de part et d'autres du milieu du rectangle. Dans chaque cas, calculez la longueur totale des films. Montrez que si $a/b > \sqrt{3}$ il n'y a qu'une seule solution à cinq films, alors que si $\sqrt{3} > a/b > 1/\sqrt{3}$ il y a deux solutions possibles. Montrez que c'est toujours avec cinq films que la longueur totale est minimale ; vérifiez ainsi que le « sommet à quatre parois » est instable (voir page 276). Faites l'expérience avec des fils de fer trempés dans l'eau savonneuse.
- Problème d'électrostatique : prouvez qu'il y a une analogie entre les équations (367) et (369) écrites ci-dessus pour une mousse à deux dimensions, et les équations de l'électrostatique (à deux dimensions, attention !). Pour cela, montrez que le potentiel, la charge électrique et le champ électrique sont les analogues respectivement de la pression P , de la topologie $(6 - n)\pi/3$, et de la courbure κ (ou plus précisément : $\vec{\kappa} = \kappa \hat{n}$, où \hat{n} est le vecteur normal à la paroi de la bulle).

- Problème de thermodynamique : considérez une mousse d'énergie $E = \gamma \sum l_{ij}$, à l'équilibre. La pression extérieure P_{atm} est constante. Calculez son enthalpie H_{eq} . Sans modifier les pressions dans chaque bulle, effectuez une dilatation de la mousse d'un facteur λ : donc λ pour les parois, λ^2 pour les aires. Calculez la nouvelle enthalpie $H(\lambda)$. En écrivant que l'équilibre est atteint pour $H(1) = H_{eq}$, démontrez qu'à l'équilibre :

$$E = 2 \sum_{i=1}^N (P_i - P_{\text{atm}}) A_i.$$

Faites le même raisonnement en d dimensions et démontrez que :

$$E = \frac{d}{d-1} \sum_{i=1}^N (P_i - P_{\text{atm}}) A_i.$$

Sources et références

On pourra par exemple consulter les articles suivants [2, 4, 5].

- [1] F. GRANER. Petits problèmes de physique – première partie. 1998. Les exercices 9, 10 donnent deux démonstrations de la loi de Laplace (équation (366)). On trouvera d'autres détails dans les exercices 21, 24, 25, et la note de l'exercice N.
- [2] F. J. ALMGREN Jr. et J. E. TAYLOR. The Geometry of Soaps Films and Soap Bubbles. *Scientific American*, volume 54, juillet 1976, pages 82-93.
- [3] T. C. HALES. The honeycomb conjecture. *Discrete and Computational Geometry*, volume 25, 2001, pages 1-22.
- [4] J. AUBERT, A. KRAYNIK, P. RAND. Les mousses aqueuses. *Pour la Science*, juillet 1996, pages 62-71.
- [5] M. VIGNES-ADLER et F. GRANER. La vie éphémère des mousses. *Pour la Science*, volume 293, mars 2002, pages 48-55.
- [6] D. WEAIRE et S. HUTZLER. *Physics of Foams*. Clarendon Press, Oxford, 1999.

Données quotidiennes

Les données fournies ici appellent trois remarques :

- 1) La Commission Internationale de l'Éclairage a défini un système d'unités lumineuses pour quantifier ce que perçoit un œil moyen (voir référence [1]). Dans ce système, la puissance s'exprime en lumens (lm). La conversion de watts en lumens dépend de la longueur d'onde. On retiendra ici qu'en moyenne, le taux de conversion est d'environ 260 lm pour 1 W. Lorsqu'il fait sombre, notre œil passe en mode de vision nocturne, plus sensible : environ 800 lm pour 1 W.
- 2) Une lampe traditionnelle à incandescence produit de l'ordre de 13 lm par watt électrique consommé, soit un rendement d'environ 5 %. Le reste passe en rayonnement infrarouge inutilisable pour l'œil. Les lampes basse puissance sont plus économiques car elles produisent $65 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$, donc leur rendement atteint 25 % : pour le même effet elles consomment cinq fois moins.
- 3) La même Commission recommande d'appeler « flux » la puissance totale émise ou reçue, en watts. La puissance émise par unité de surface (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$, voir loi de Stefan) est appelée l'« exitance » ; la puissance reçue par unité de surface (également en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) est appelée l'« éclairement ». Je n'ai pas utilisé ces termes : j'ai choisi la convention de la thermodynamique, où le mot « flux » désigne des $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.

TABEAU 2 CONVERSION D'UN WATT EN UNITÉS LUMINEUSES [1].

type de vision	normale	nocturne
moyenne sur le spectre visible	$0,3 \cdot 10^3 \text{ lm}$	$0,8 \cdot 10^3 \text{ lm}$
maximum de sensibilité	$0,7 \cdot 10^3 \text{ lm}$ (à 560 nm)	$1,7 \cdot 10^3 \text{ lm}$ (à 510 nm)

TABLEAU 3 CONVERSION DES UNITÉS NON DÉCIMALES.

unité de temps	1 min	1 h	1 jour	1 an
valeur en seconde	60 s	3 600 s	$8,64 \cdot 10^4$ s	$3,16 \cdot 10^7$ s
unité d'angle	1'	1°	1 rad	1 tour
valeur en seconde d'arc	60''	3 600''	$2,06 \cdot 10^5$ ''	$1,3 \cdot 10^6$ ''

TABLEAU 4 L'EAU ET L'AIR AMBIANTS [2].

	eau	air	unité	
n	1,33	1,000279		indice de réfraction
ρ	10^3	1,2	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	masse volumique. Pour comparer : fer : $7\,800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, aluminium : $2\,700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, nylon : $1\,100 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, huiles : $\sim 900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, bois dense : $\sim 900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, balsa : $150 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
m	$18 \cdot 10^{-3}$	$29 \cdot 10^{-3}$	kg	masse molaire
v	$18 \cdot 10^{-6}$	$22,4 \cdot 10^{-3}$	m^3	volume molaire
c_p	$4,18 \cdot 10^3$	10^3	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	capacité calorifique par unité de masse, à pression constante
c_v	$4,18 \cdot 10^3$	$7 \cdot 10^2$	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	capacité calorifique par unité de masse, à volume constant
γ	1	1,4		rapport c_p/c_v des capacités calorifiques à P et V constants
κ	0,6	0,025	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	conductivité thermique
D	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	diffusivité thermique isobare $D = \kappa / \rho c_p$
μ	10^{-3}	$\sim 10^{-5}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$	viscosité dynamique $\mu = \rho \nu$ (cf. huiles usuelles : $\sim 10^{-2}$)
ν	10^{-6}	$\sim 10^{-5}$	$\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$	diffusivité de la quantité de mouvement (viscosité cinématique)
h_{atm}	10,3	$8 \cdot 10^3$	m	hauteur équivalente à une atmosphère : $h_{\text{atm}} = P_{\text{atm}} / (\rho g)$

TABLEAU 5 QUELQUES DONNÉES THERMODYNAMIQUES À TEMPÉRATURE AMBIANTE [2].

RT	$2,4 \cdot 10^3$	J	énergie libre macroscopique typique : $N_{Av} k_B T_{amb}$
$k_B T$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	eV	énergie libre microscopique typique : $k_B T_{amb}/e$
λ	$5 \cdot 10^{-5}$	m	longueur d'onde typique d'un rayonnement isotherme : $c/\nu = hc/(k_B T_{amb})$
A	$7,3 \cdot 10^{-2}$	$N \cdot m^{-1}$	tension de surface eau-air $1 N \cdot m^{-1} = 1 J \cdot m^{-2} = 1 kg \cdot s^{-2}$
c_L	$4,18 \cdot 10^3$	$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$	capacité calorifique de l'eau ($c_L = c_P \approx c_V$)
L_f	$3,2 \cdot 10^5$	$J \cdot kg^{-1}$	chaleur latente de fusion de l'eau (transition eau-glace)
L_e	$2,4 \cdot 10^6$	$J \cdot kg^{-1}$	chaleur latente d'évaporation de l'eau (transition eau-vapeur)
P_{sat}	$3 \cdot 10^3$	Pa	pression de vapeur saturante de l'eau (à $100^\circ C$, $P_{sat} = 1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$)

TABLEAU 6 DOMAINE ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET DOMAINE ACOUSTIQUE.

c	$3 \cdot 10^8$	$m \cdot s^{-1}$	vitesse de la lumière
λ	1-100 0,4-0,8 $\sim 10^{-1}$	μm μm μm	longueurs d'ondes infrarouges longueurs d'ondes visibles longueurs d'ondes ultraviolettes
ω	$\sim 10^{14}$ $\sim 10^{15}$ $\sim 10^{16}$	$rad \cdot s^{-1}$ $rad \cdot s^{-1}$ $rad \cdot s^{-1}$	fréquences infrarouges fréquences visibles fréquences ultraviolettes
c_s	330	$m \cdot s^{-1}$	vitesse du son dans l'air ambiant
λ_s	$\sim 10^2$	μm m mm	longueurs d'ondes infrasonores longueurs d'ondes audibles longueurs d'ondes ultrasonores
ω_s	~ 10 $10^2 - 10^5$ $\sim 10^6$	$rad \cdot s^{-1}$ $rad \cdot s^{-1}$ $rad \cdot s^{-1}$	fréquences infrasonores fréquences audibles fréquences ultrasonores

TABLEAU 7 ÉNERGIES ET PUISSANCES.

σ_s	$5,67 \cdot 10^{-8}$	$\text{W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^{-4}$	constante de Stefan
Φ_r	$1,35 \cdot 10^3$	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	flux moyen reçu par la Terre venant du Soleil
	$1 \sim 10$	W	Consommation typique d'un appareil à piles (ex : lampe de poche 3,6 W)
	$10^2 \sim 10^3$	W	Consommation typique d'un appareil électro-ménager (ex : lampe de plafond 100 W)
	10^7	J	consommation alimentaire quotidienne moyenne d'un européen
	$10^4 \sim 10^5$	W	consommation typique d'une automobile
	$3,7 \cdot 10^7$	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$	apport énergétique des lipides (protéines ou glucides : $1,7 \cdot 10^7 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$)
tep	$5 \cdot 10^{10}$	J	apport énergétique d'une tonne de pétrole (tonne équivalent pétrole)

TABLEAU 8 LA TERRE ET LE SOLEIL [3] ; VOIR AUSSI PAGE 16.

R_T	$6,37 \cdot 10^6$	m	rayon moyen de la Terre.
α_{axe}	0,41	rad	inclinaison de l'écliptique ¹ (23° 27')
T_T	$8,62 \cdot 10^4$	s	période de rotation propre de la Terre (jour sidéral) : 23 h 56 min 4 s
T_r	$3,2 \cdot 10^7$	s	période de rotation de la Terre sur son orbite (1 an)
d_s	$1,50 \cdot 10^{11}$	m	orbite terrestre : distance moyenne Terre-Soleil ²
R_s	$6,96 \cdot 10^8$	m	rayon de la photosphère ³ du Soleil
α_s	$4,6 \cdot 10^{-3}$	rad	rayon angulaire moyen du Soleil (le diamètre apparent varie de 31,5 à 32,5')

Sources et références

- [1] J.-L. MEYZONNETTE et T. LÉPINE. La photométrie/radiométrie optique. *Optique et photonique*, volume 1, 1999, pages 31-34.
- [2] D. R. LIDE, éditeur. *Handbook of Chemistry and Physics*. CRC Press, Boca Raton, 79ème édition, 1998-1999.
- [3] INSTITUT DE MÉCANIQUE CÉLESTE. *Les éclipses de soleil – L'éclipse totale du 11 août 2001*. EDP Science, Les Ulis, 1999.

¹ C'est-à-dire l'inclinaison de l'axe des pôles sur le plan de l'orbite terrestre.

² Le rayon et la distance moyenne du Soleil ne sont pas à proprement parler des données quotidiennes. En général, elles n'interviennent pas dans les exercices, voir page 87.

³ Surface qui émet la lumière que nous voyons, voir page 139.

REMERCIEMENTS

Ce livre est inspiré par mon grand-père Jozsi Graner, observateur passionné et passionnant de la science quotidienne.

Un remerciement chaleureux à Antoine Llor qui a entièrement relu et critiqué le manuscrit. Béatrice Janiaud, Nicolas Graner, et Christian Miniatura ont relu de nombreuses parties et m'ont fait bénéficier de leurs conseils.

Joël Martin et Nicolas Graner ont fourré leurs titres avec des contrepétries. Je leur dis, aux deux : grand merci !

J'ai également reçu de l'aide de : Jacques Antel, Daniel Blaudez, Yves Bréchet, Julien Browaeys, Thierry Charitat, Romuald Fassot, Georges Graner, Thierry Grenet, Robin Kaiser, Jo Lajzerowicz, Aurélien Léon, Roland Lehoucq, la brasserie Mandrin, Catherine Quilliet, Nicolas Retière, Daniel Riveline, Denis Savoie, Marie-Christine Willaime, Alain Zalmanski, ainsi que des candidat(e)s aux concours des Écoles Normales Supérieures de 1999 à 2001.

CRÉDITS ILLUSTRATIONS

C'est Éric Fourcoux qui a réalisé les dessins. Il a réussi à garder sa bonne humeur malgré mes demandes incessantes de modifications. Merci beaucoup !

Les graphiques sont de l'auteur, avec l'aide de Nicolas Markey, qui a également repris la typographie.

Figure 7 : inspirée de « Trois sphères II », auto-portrait de Escher se reflétant dans une sphère, lithographie, 1946, publiée dans « L'œuvre graphique de M.C. Escher », Solin, Malakoff 1973.

Figure 31 : photo aimablement fournie par Olivier Lordereau.

Figure 48 : photo provenant du site internet de l'Université de Laval, au Canada : <http://wood.phy.ulaval.ca/>, avec l'aimable autorisation de E. Borra.

Figure 97 : photo aimablement fournie par Sébastien Courty.